1

解答解説のページへ

$a,\ b,\ c,\ d$ は $a+c=b+d=1$ を満たす正の定数とし，行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考える。さらに，$x_1+y_1=1$ を満たす実数 x_1，y_1 に対し，x_n，y_n $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ を漸化式

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

によって帰納的に定める。

(1)　$x_n+y_n=1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ であることを示せ。

(2)　x_n をまず $a,\ b,\ x_{n-1}$ で表し，次に $a,\ b,\ x_1$ で表せ。

(3)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ。

2

解答解説のページへ

座標空間の 2 点 A$(2,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ -1,\ 0)$，および $\vec{u}=(-1,\ 2,\ 5)$，$\vec{v}=(1,\ 1,\ 1)$，$\vec{w}=(-1,\ 3,\ 1)$ と成分表示される 3 つのベクトルがある。次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\vec{u}$ が平行かつ $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ と $\vec{v}$ が平行となるような点 P の座標を求めよ。

(2)　上で求めた点 P に対し，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ と $\vec{w}$ が直交するような点 C$(0,\ 0,\ c)$ を求めよ。

(3)　上で求めた点 P と C に対し，P は 3 点 A, B, C の定める平面上にあることを示せ。

3

解答解説のページへ

$f(x)=\dfrac{8x+21}{3x+8}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　$f(\sqrt{7})=\sqrt{7}$ であることを示せ。

(2)　$x \geqq 0$ ならば $f(x) \geqq 2$ であることを示せ。

(3)　$x \geqq 2,\ y \geqq 2$ ならば，$|f(x)-f(y)| \leqq \dfrac{|x-y|}{100}$ となることを示せ。

(4)　$x \geqq 2$ ならば，$\left|f(f(x))-\sqrt{7}\right| \leqq \dfrac{|x-\sqrt{7}|}{10000}$ となることを示し，これを用いて，$|r-\sqrt{7}|<10^{-4}$ を満たす有理数 r を 1 つ求めよ。

4

解答解説のページへ

$0<b<a$ を満たす定数 $a,\ b$ に対し, 2 つの楕円

$$A:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad B:\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

を考える。また α, β は, $\sin\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\beta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ を満たす 0 と $\dfrac{\pi}{2}$ の間の実数とする。次の問いに答えよ。

(1) $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$ を示せ。

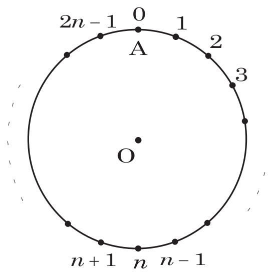
(2) 2 つの楕円 $A,\ B$ の第 1 象限にある交点の座標を求めよ。

(3) 楕円 A で囲まれる図形と楕円 B で囲まれる図形の共通部分のうち, $x\geqq 0,\ y\geqq 0$ の範囲にある部分の面積 S を $a,\ b$, β を用いて表せ。

5

解答解説のページへ

n を 2 以上の整数とする。中心を O とする円の周を $2n$ 等分して，図のように 0 から $2n-1$ までの目盛りを付ける。目盛りが 0 の点を A とする。一方，袋の中に 1 から $2n-1$ までの整数を書いた玉がそれぞれ 1 個ずつ入っている。この袋から玉を 2 つ取り出して，玉に書かれた数と同じ目盛りをもつ 2 点をとる。2 点のうち目盛りの大きい方を B，目盛りの小さい方を C として，△ABC を考える。次の問いに答えよ。



(1) 辺 BC 上に点 O がある場合は何通りあるか。

(2) △ABC の辺上に点 O がある確率を求めよ。

(3) △ABC の内部に点 O がある確率は $\dfrac{n-2}{2(2n-1)}$ であることを示せ。

(4) △ABC の辺上に点 O があるとき $X=1$，△ABC の内部に点 O があるとき $X=2$，それ以外のとき $X=0$ とする。X の期待値を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$x_n + y_n = 1$ ($n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$) であることを数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n = 1$ のとき　条件から $x_1 + y_1 = 1$ より，成立する。

(ii)　$n = k$ のとき　$x_k + y_k = 1$ と仮定する。

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_k + by_k \\ cx_k + dy_k \end{pmatrix}$$

すると，$a + c = b + d = 1$ より，

$$x_{k+1} + y_{k+1} = (a+c)x_k + (b+d)y_k = x_k + y_k = 1$$

よって，$n = k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，すべての自然数 n で，$x_n + y_n = 1$ である。

(2)　(1)より，$y_n = 1 - x_n$ となり，

$$x_n = ax_{n-1} + by_{n-1} = ax_{n-1} + b(1 - x_{n-1}) = (a-b)x_{n-1} + b$$

ここで，$\alpha = (a-b)\alpha + b$ とおくと，$(1-a+b)\alpha = b$

さて，$1 - a + b = c + b > 0$ より，$\alpha = \dfrac{b}{1-a+b}$ となり，

$$x_n - \frac{b}{1-a+b} = (a-b)\left(x_{n-1} - \frac{b}{1-a+b}\right)$$

よって，$x_n - \dfrac{b}{1-a+b} = \left(x_1 - \dfrac{b}{1-a+b}\right)(a-b)^{n-1}$ より，

$$x_n = \left(x_1 - \frac{b}{1-a+b}\right)(a-b)^{n-1} + \frac{b}{1-a+b}$$

(3)　$a > 0$，$b > 0$，$c = 1 - a > 0$，$d = 1 - b > 0$ より，$0 < a < 1$, $0 < b < 1$ となり，

$$-1 < a - b < 1$$

よって，$n \to \infty$ のとき，$(a-b)^n \to 0$ となり，

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{b}{1-a+b}$$

［解 説］

誘導つきで連立漸化式を解く基本問題です。

2

問題のページへ

(1)　$\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-2,\ y,\ z)$，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(x,\ y+1,\ z)$となる。

さて，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\,/\!/\,\vec{u}$より, sを実数として，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\vec{u}$，$(x-2,\ y,\ z)=s(-1,\ 2,\ 5)$

$$x=-s+2,\ y=2s,\ z=5s\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}\,/\!/\,\vec{v}$より, tを実数として，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=t\vec{v}$，$(x,\ y+1,\ z)=t(1,\ 1,\ 1)$

$$x=t,\ y=t-1,\ z=t\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$-s+2=t\cdots\cdots③$，$2s=t-1\cdots\cdots④$，$5s=t\cdots\cdots⑥$

③④より，$t=\dfrac{5}{3}$，$s=\dfrac{1}{3}$となり，この値は⑥を満たす。

よって，①より$x=\dfrac{5}{3}$，$y=\dfrac{2}{3}$，$z=\dfrac{5}{3}$となり，$\mathrm{P}\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{5}{3}\right)$である。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{5}{3}-c\right)$となり，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\perp\vec{w}$から，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\vec{w}=0$

$$-\frac{5}{3}+3\times\frac{2}{3}+\frac{5}{3}-c=0,\ c=2$$

よって，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 2)$となる。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{2}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(2,\ 0,\ -2)$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=(0,\ -1,\ -2)$より，

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\frac{5}{6}\overrightarrow{\mathrm{CA}}-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{CB}}$$

よって, Pは3点A, B, Cの定める平面上にある。

［解 説］

(3)では, x成分, y成分より，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}$の係数をそれぞれ定め，その後, z成分を確認しました。連立方程式を立てるほどでもありません。なお，文系で，(3)の設問形式の異なるだけの類題が出ています。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1) $f(\sqrt{7})=\dfrac{8\sqrt{7}+21}{3\sqrt{7}+8}=\dfrac{\sqrt{7}(8+3\sqrt{7})}{3\sqrt{7}+8}=\sqrt{7}$

(2) $f(x)-2=\dfrac{8x+21}{3x+8}-2=\dfrac{2x+5}{3x+8}$ より, $x\geqq 0$ のとき $f(x)-2\geqq 0$ である。

よって, $x\geqq 0$ ならば $f(x)\geqq 2$ である。

(3) $x\geqq 2$, $y\geqq 2$ のとき,

$$|f(x)-f(y)|=\left|\frac{8x+21}{3x+8}-\frac{8y+21}{3y+8}\right|$$
$$=\frac{|(8x+21)(3y+8)-(3x+8)(8y+21)|}{(3x+8)(3y+8)}=\frac{|x-y|}{(3x+8)(3y+8)}$$

ここで, $(3x+8)(3y+8)\geqq 14^2>100$ より,

$$\frac{|x-y|}{(3x+8)(3y+8)}\leqq\frac{|x-y|}{100}$$

よって, $|f(x)-f(y)|\leqq\dfrac{|x-y|}{100}$ ………①

(4) (1)(2)より, $x\geqq 2$ のとき $f(x)\geqq 2$, $f(\sqrt{7})=\sqrt{7}\geqq 2$ なので, ①より,

$$|f(f(x))-f(f(\sqrt{7}))|\leqq\frac{|f(x)-f(\sqrt{7})|}{100}\leqq\frac{|x-\sqrt{7}|}{10000}$$

ここで, $f(f(\sqrt{7}))=f(\sqrt{7})=\sqrt{7}$ より,

$$|f(f(x))-\sqrt{7}|\leqq\frac{|x-\sqrt{7}|}{10000}\ \text{………②}$$

さて, ②に $x=2$ を代入すると,

$$|f(f(2))-\sqrt{7}|\leqq\frac{|2-\sqrt{7}|}{10000}<\frac{1}{10000}=10^{-4}$$

よって, 求める有理数 r の 1 つは, $r=f(f(2))=f\left(\dfrac{37}{14}\right)=\dfrac{590}{223}$

［解 説］

$\sqrt{7}$ の近似値を求める問題です。きめ細かい誘導のために, 解の流れは明快です。

4

問題のページへ

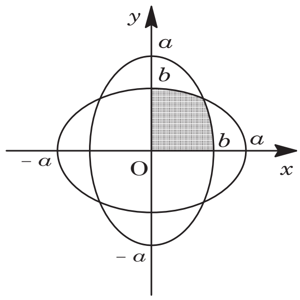
(1)　$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，$\sin\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\beta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$より，

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\frac{a^2}{a^2+b^2}}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\beta=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2+b^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

すると，$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$$=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=1$$

よって，$0<\alpha+\beta<\pi$から，$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$



(2)　$A:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$B:\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$より，

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2\cdots\cdots\cdots①$$

$$a^2x^2+b^2y^2=a^2b^2\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$(a^2-b^2)(x^2-y^2)=0$

$0<b<a$より，$x^2=y^2$となり，①に代入して，

$$(a^2+b^2)x^2=a^2b^2,\quad x^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

$x>0$, $y>0$となるのは，$x=y=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$のときで，第 1 象限にある A と B の交点の座標は，$\left(\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$となる。

(3)　楕円 A の第 1 象限の部分は，①より，$y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

さて，楕円 A と B で囲まれる図形の共通部分のうち，$x\geqq0$, $y\geqq0$ の範囲にある部分は，直線 $y=x$ に関して対称であるので，その面積 S は，

$$\frac{S}{2}=\int_0^{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx-\frac{1}{2}\cdot\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$=\frac{b}{a}\int_0^{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}\sqrt{a^2-x^2}\,dx-\frac{a^2b^2}{2(a^2+b^2)}$$

ここで，$\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=a\sin\beta$であり，$x=a\sin\theta$とおくと，

$$\int_0^{a\sin\beta}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int_0^{\beta}\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}\cdot a\cos\theta\,d\theta=a^2\int_0^{\beta}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{\beta}(1+\cos2\theta)\,d\theta=\frac{a^2}{2}\Big[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\Big]_0^{\beta}$$

$$=\frac{a^2}{2}\beta+\frac{a^2}{4}\sin2\beta$$

以上より，$S=\dfrac{2b}{a}\left(\dfrac{a^2}{2}\beta+\dfrac{a^2}{4}\sin 2\beta\right)-\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}=ab\beta+ab\sin\beta\cos\beta-\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$

$$=ab\beta+ab\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}-\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}=ab\beta$$

［解　説］

楕円が境界線となっている図形の面積を求める問題です。直線 $y=x$ に関して対称であることに気付けば，積分が 1 回で済みます。

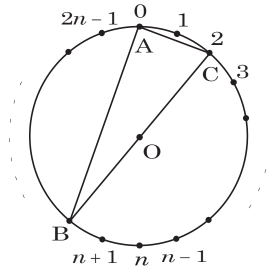
5

問題のページへ

(1)　辺 BC 上に点 O がある場合は,

$$(B,\ C)=(n+1,\ 1),\ (n+2,\ 2),\ \cdots,\ (2n-1,\ n-1)$$

よって, $n-1$ 通りの場合がある。



(2)　辺 AB 上に点 O がある場合は,

$$(B,\ C)=(n,\ 1),\ (n,\ 2),\ \cdots,\ (n,\ n-1)$$

よって, $n-1$ 通りの場合がある。

また, 辺 AC 上に点 O がある場合は,

$$(B,\ C)=(n+1,\ n),\ (n+2,\ n),\ \cdots,\ (2n-1,\ n)$$

よって, $n-1$ 通りの場合がある。

以上より, (1)の場合も考え合わせて, △ABC の辺上に点 O がある確率は,

$$\frac{3(n-1)}{{}_{2n-1}\mathrm{C}_2}=\frac{6(n-1)}{(2n-1)(2n-2)}=\frac{3}{2n-1}$$

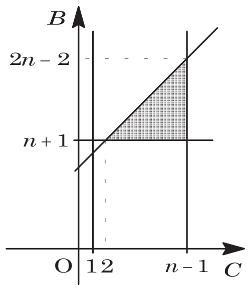
(3)　△ABC の内部に点 O がある場合は,

$$1\leqq C\leqq n-1,\ n+1\leqq B\leqq n+C-1$$

この不等式を CB 平面上に図示すると, 右図の網点部となる。この領域内にある格子点 $(C,\ B)$ の個数は,

$$1+2+3+\cdots+(n-2)=\frac{1}{2}(n-2)(n-1)$$

よって, この場合の確率は, $\dfrac{(n-2)(n-1)}{2\times{}_{2n-1}\mathrm{C}_2}=\dfrac{n-2}{2(2n-1)}$



(4)　X の期待値を E とすると,

$$E=1\times\frac{3}{2n-1}+2\times\frac{n-2}{2(2n-1)}+0\times\left\{1-\frac{3}{2n-1}-\frac{n-2}{2(2n-1)}\right\}=\frac{n+1}{2n-1}$$

［解 説］

たびたび出題されている確率の有名問題です。(3)では, 格子点の個数を対応させて数えています。