1

解答解説のページへ

3 次関数 $y = x^3 - cx$ のグラフを考える。ただし, c は定数とする。そして, 2 点 P, Q が次の条件を満たしながら, このグラフ上全体を動くものとする。

（条件） P の x 座標は Q の x 座標より 1 だけ小さい

このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 線分 PQ の傾きが最小になるときの点 P の x 座標と, 傾きの最小値を求めよ。

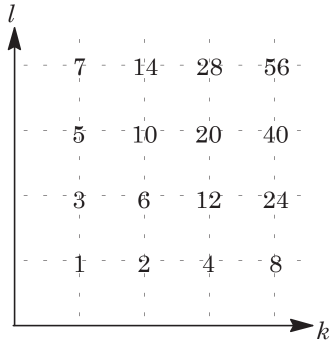
(2) 線分 PQ の傾きが 0 となる点 P が存在するような, c の値の範囲を求めよ。

(3) 線分 PQ の中点の x 座標と同じ x 座標をもつグラフ上の点を R とする。点 R におけるグラフの接線の傾きは, 線分 PQ の傾きよりつねに小さいことを示せ。

2

解答解説のページへ

$k,\ l$ を自然数とし，座標平面上の点$(k,\ l)$に数$2^{k-1}(2l-1)$を記入する(右図を参照)。このとき，次の問いに答えよ。



(1)　点$(2,\ 25)$に記入される数を求めよ。

(2)　2008 が記入される点の座標を求めよ。

(3)　どの自然数も座標平面上のどこかの点に 1 回だけ記入される。この理由を書け。

3

解答解説のページへ

2点A，Bと，その上を動く1個の石を考える。この石は，時刻$t=0$で点Aにあり，その後，次の規則(a)，(b)にしたがって動く。

各$t=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$に対して，

(a)　時刻tに石が点Aにあれば，時刻$t+1$に石が点Aにある確率は$\dfrac{1}{3}$，点Bにある確率は$\dfrac{2}{3}$である。

(b)　時刻tに石が点Bにあれば，時刻$t+1$に石が点Bにある確率は$\dfrac{1}{3}$，点Aにある確率は$\dfrac{2}{3}$である。

いま，nを自然数とし，時刻$t=n$において石が点Aにある確率をp_nとするとき，次の問いに答えよ。

(1)　p_1を求めよ。

(2)　p_{n+1}をp_nを用いて表せ。

(3)　p_nを求めよ。

4

解答解説のページへ

$x_1 = x_2 = 1$ とし，x_n $(n = 3,\ 4,\ \cdots)$ は x_{n-2} と x_{n-1} の和を 3 で割ったときの余りであるとして，数列 $\{x_n\}$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ を定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{x_n\}$ の第 3 項から第 12 項までのそれぞれの値を，解答用紙にある表の中に書け。

(2) x_{346} を求めよ。

(3) $S_m = \sum_{n=1}^{m} x_n$ とおくとき，$S_m \geqq 684$ を満たす最小の自然数 m を求めよ。

$\boxed{5}$ 解答解説のページへ

三角形 OAB において, OA を $t:(1-t)$ に内分する点を M, OB を $t:(1-t)$ に内分する点を N とする。ただし, t は $0<t<1$ の範囲を動く。そして, 線分 AN と BM の交点を P とするとき, 次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ および t を用いて表し, $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が平行であることを示せ。

(2) $s=\dfrac{\mathrm{BM}}{\mathrm{BP}}$ とするとき, s を t を用いて表し, s のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) 三角形 AMP と三角形 OAB の面積比 $r=\dfrac{\triangle\mathrm{AMP}}{\triangle\mathrm{OAB}}$ を(2)の s を用いて表し, r の最大値を求めよ。

1

問題のページへ

(1) $y=x^3-cx$ ……①に対して，$\mathrm{P}(t,\ t^3-ct)$，$\mathrm{Q}(t+1,\ (t+1)^3-c(t+1))$とおく。

ここで，線分 PQ の傾きを m とすると，

$$m=\frac{(t+1)^3-c(t+1)-(t^3-ct)}{(t+1)-t}=3t^2+3t+1-c=3\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}-c\ \cdots\cdots\cdots②$$

よって, m は $t=-\frac{1}{2}$ のとき，最小値 $\frac{1}{4}-c$ をとる。

(2) $m=0$ となる P が存在する条件は，②より，$\frac{1}{4}-c\leqq 0$ から，$c\geqq\frac{1}{4}$ である。

(3) 条件より，点 R の x 座標は，$x=t+\frac{1}{2}$ となる。

①より，$y'=3x^2-c$ から, R における接線の傾き n は,

$$n=3\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-c\ \cdots\cdots\cdots③$$

②③より, $m>n$ となり，点 R におけるグラフの接線の傾きは，線分 PQ の傾きよりつねに小さい。

［解 説］

接線についての基本問題です。(2)では，グラフを考えて，条件を記しています。

2

問題のページへ

(1)　点$(2,\ 25)$に記入される数は，条件より，

$$2^1\times(2\times25-1)=98$$

(2)　2008 を 2 で割っていくと，

$$2008=2^3\times251=2^{4-1}\times(2\times126-1)$$

よって, 2008 が記入される点の座標は，$(4,\ 126)$である。

(3)　任意の自然数 n を素因数分解すると，2 以外の素数はすべて奇数より，自然数 k, 奇数 m がただ 1 つ存在し,

$$n=2^{k-1}\times m$$

さらに, m は自然数 l を用いて，$m=2l-1$ と表せる。

これより，$n=2^{k-1}(2l-1)$となり，任意の自然数 n に対して，点$(k,\ l)$が 1 つ定まる。

［解　説］

(3)の記述はこの程度でよいのか，迷うところです。

3

問題のページへ

(1) 石は，時刻$t=0$で点 A にあるので，時刻$t=1$においても点 A にある確率p_1は，規則(a)より，$p_1=\dfrac{1}{3}$である。

(2) 石が時刻$t=n$に点 A にあるとき，時刻$t=n+1$にも点 A にある確率は$\dfrac{1}{3}$，また時刻$t=n$に点 B にあるとき，時刻$t=n+1$に点 A にある確率は$\dfrac{2}{3}$より，

$$p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{2}{3}(1-p_n)=-\frac{1}{3}p_n+\frac{2}{3}\cdots\cdots\cdots(*)$$

(3) (＊)を変形すると，$p_{n+1}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{3}\left(p_n-\dfrac{1}{2}\right)$となり，

$$p_n-\frac{1}{2}=\left(p_1-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}=-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

よって，$p_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$である。

［解 説］

有名な漸化式の確率への応用です。その中でも，最も基本的なタイプです。

$\boxed{4}$ 問題のページへ

(1)　条件より，

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_n	1	1	2	0	2	2	1	0	1	1	2	0

(2)　(1)より，帰納的に，数列$\{x_n\}$は周期 8 の周期数列となり，$346 = 8\times 43 + 2$より，

$$x_{346} = x_2 = 1$$

(3)　数列$\{x_n\}$をx_1より 8 項ずつで区切り，$x_1 \sim x_8$を第 1 群，$x_9 \sim x_{16}$を第 2 群，…とする。

さて，$x_1 + x_2 + \cdots + x_8 = 9$より, m 項までの和$S_m = 684$を 9 で割ると,

$$684 = 9\times 76$$

これより, 第 76 群の末項である$8\times 76 = 608$項目までの和が 684 となっている。

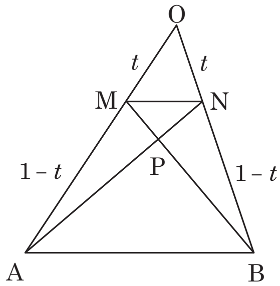
ここで，$x_{608} = 0$，$x_{607} = 1$から，$S_m \geqq 684$を満たす最小の自然数 m は$m = 607$である。

［解 説］

(3)での割り算は, 余りが出て, それを微調整するという数値が選んであると予測しましたが, はずれました。もっとも微調整は必要でしたが。

5

問題のページへ



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}=t\overrightarrow{\mathrm{OB}}-t\overrightarrow{\mathrm{OA}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$より,

$$\overrightarrow{\mathrm{MN}}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

(2)　$\mathrm{BP}:\mathrm{PM}=1:t$より,

$$s=\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{BP}}=\frac{t+1}{1}=t+1$$

すると, $0<t<1$から, $1<s<2$である。

(3)　$\mathrm{MP}:\mathrm{MB}=t:t+1$，$\mathrm{AM}:\mathrm{AO}=1-t:1$より,

$$\triangle\mathrm{AMP}=\frac{t}{t+1}\triangle\mathrm{AMB}=\frac{t(1-t)}{t+1}\triangle\mathrm{OAB}$$

これより，$r=\dfrac{\triangle\mathrm{AMP}}{\triangle\mathrm{OAB}}=\dfrac{t(1-t)}{t+1}=\dfrac{(s-1)(2-s)}{s}=-s-\dfrac{2}{s}+3$

ここで, $s>0$から, 相加平均と相乗平均の関係より,

$$s+\frac{2}{s}\geqq 2\sqrt{s\cdot\frac{2}{s}}=2\sqrt{2}$$

等号は$s=\dfrac{2}{s}$すなわち$s=\sqrt{2}$のとき成立し, この値は$1<s<2$を満たす。

よって，$r\leqq -2\sqrt{2}+3$から, rの最大値は$-2\sqrt{2}+3$である。

［解 説］

ベクトルの平面図形への応用です。ただ, (1)の設問は不要ではないかと……。