**1**

解答解説のページへ

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$を $2\times2$ 行列，$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$を零行列，$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$を単位行列とする。

このとき，次の問いに答えよ。

(1) 「$A^3=O$ ならば $A^2=O$ が成り立つことを示せ」という問題に対して，次のような解答があった。

「$A^3=O$ ならば $A=O$ ………①

$A=O$ ならば $A^2=O$ ………②

①②によって，$A^3=O$ ならば $A^2=O$ が成り立つ」

この解答には誤りがある。解答中の①，②のそれぞれについて，正しいかどうかを判定し，正しくない場合は正しくないことを示す例（反例）をあげよ。

(2) $A^3=O$ のとき，$A$ は逆行列をもたないことを示せ。

(3) 「$A^3=O$ ならば $A^2=O$ が成り立つ」ことを証明せよ。ただし，等式

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$$

が成り立つことは証明なしで用いてよい。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

次の問いに答えよ。ただし, $n$ は自然数を表す。

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ を満たす実数 $x$ に対して，不等式

$$\frac{x}{n+1} \leqq \log\left(1+\frac{x}{n}\right) \leqq \frac{x}{n}$$

が成り立つことを示せ。ただし，対数は自然対数とする。

(2) 次の値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5$$

(3) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \left(1+\frac{1^5}{n^6}\right)\left(1+\frac{2^5}{n^6}\right)\cdots\left(1+\frac{n^5}{n^6}\right)$$

で定めるとき，極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

**3**

解答解説のページへ

2 点 A, B と，その上を動く 1 個の石がある。この石は，時刻$t=0$では点 A にあり，その後，次の規則(a), (b)にしたがって動く。

各$t=0$, 1, 2, $\cdots$に対して，

(a)　時刻 $t$ に石が点 A にあれば，時刻$t+1$に石が点 A にある確率は $c$，点 B にある確率は$1-c$である。

(b)　時刻 $t$ に石が点 B にあれば，時刻$t+1$に石が点 B にある確率は $2c$，点 A にある確率は$1-2c$である。

ただし，$c$ は$0<c<\dfrac{1}{2}$を満たす定数とする。

いま，$n$ を自然数とし，時刻$t=n$において石が点 A にある確率を $p_n$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$p_1$，$p_2$ を求めよ。

(2)　$p_{n+1}$ を $p_n$ と $c$ を用いて表せ。

(3)　$p_n$ を求めよ。

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ。

**4**

解答解説のページへ

平面上のベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$は，その大きさがともに$\sqrt{2}$であり，なす角が$120^\circ$である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 内積$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$を求めよ。

(2) $k,\ l$を整数とするとき，$|k\vec{a}+l\vec{b}|^2$は偶数であることを示せ。

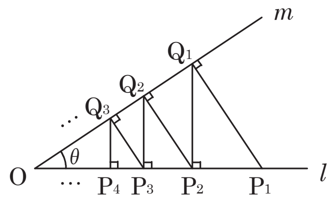
(3) (2)で，$k$または$l$が奇数のとき，$|k\vec{a}+l\vec{b}|^2$は$4$の倍数ではないことを示せ。

(4) $m,\ n$が整数であり，$m=n=0$ではないならば，$|m\vec{a}+n\vec{b}|$は整数ではないことを示せ。

**5**

解答解説のページへ

右図のように，点 O から出る 2 本の半直線 $l$, $m$ があり，$l$ と $m$ のなす角を $\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。$l$ 上に $\mathrm{OP_1}=1$ となるように点 $\mathrm{P_1}$ を定め，$\mathrm{P_1}$ から $m$ に垂線 $\mathrm{P_1Q_1}$ を下ろし，$\mathrm{Q_1}$ から $l$ に垂線 $\mathrm{Q_1P_2}$ を下ろし，$\mathrm{P_2}$ から $m$ に垂線 $\mathrm{P_2Q_2}$ を下ろし，$\mathrm{Q_2}$ から $l$ に垂線 $\mathrm{Q_2P_3}$ を下ろす。




同様にくりかえして，点 $\mathrm{P}_n$，$\mathrm{Q}_n$ ($n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$) を定め，三角形 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の面積を $S_n$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{\mathrm{P_2Q_2}}{\mathrm{P_1Q_1}}$ を求めよ。

(2) $\dfrac{S_2}{S_1}$ を求めよ。

(3) $S=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ を求め，$\sin 2\theta$ と $\cos 2\theta$ を用いて表せ。

(4) (3)で求めた $S$ を $\theta$ の関数と考えて，$S$ の最大値を求めよ。ただし，その最大値を与える $\theta$ の値は求めなくてよい。

**1**

問題のページへ

(1) 「$A^3=O$ ならば $A=O$」は誤り。反例は，$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$

「$A=O$ ならば $A^2=O$」は正しい。

(2) $A^3=O$ のとき，$A^{-1}$ が存在すると仮定し，$A^3=O$ に左からかけると，

$$A^{-1}A^3=A^{-1}O,\ A^2=O$$

さらに，$A^{-1}A^2=A^{-1}O$ とすると，$A=O$ となり，$A^{-1}$ が存在するという仮定に反する。

よって，$A^3=O$ のとき, $A$ は逆行列をもたない。

(3) $A^3=O$ のとき, (2)より，$A^{-1}$ は存在しないので，$ad-bc=0$

これより，与えられた式から，$A^2=(a+d)A$ ……(＊)となり，

$$A^3=(a+d)A^2=(a+d)^2A$$

$A^3=O$ から，$a+d=0$ または $A=O$ である。

(i) $a+d=0$ のとき　(＊)より，$A^2=O$ となる。

(ii) $A=O$ のとき　$A^2=O$ である。

(i)(ii)より，$A^3=O$ ならば $A^2=O$ である

［解 説］

べき零行列に関する定理の証明です。同じ問題が，誘導なしの形式でも，過去に何度も出ています。

**2**

問題のページへ

(1)　$0\leqq x\leqq 1$ において，$f(x)=\log\left(1+\dfrac{x}{n}\right)-\dfrac{x}{n+1}$ とおく。

$$f'(x)=\frac{1}{n+x}-\frac{1}{n+1}=\frac{1-x}{(n+1)(n+x)}\geqq 0$$

よって，$f(x)\geqq f(0)=0$

また, $0\leqq x\leqq 1$ において，$g(x)=\dfrac{x}{n}-\log\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$ とおく。

$$g'(x)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}=\frac{x}{n(n+x)}\geqq 0$$

よって，$g(x)\geqq g(0)=0$

以上より, $0\leqq x\leqq 1$ において，$\dfrac{x}{n+1}\leqq\log\left(1+\dfrac{x}{n}\right)\leqq\dfrac{x}{n}$

(2)　区間 $0\leqq x\leqq 1$ を $n$ 等分して,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5=\int_0^1 x^5dx=\frac{1}{6}$$

(3)　$a_n=\left(1+\dfrac{1^5}{n^6}\right)\left(1+\dfrac{2^5}{n^6}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n^5}{n^6}\right)$のとき,

$$\log a_n=\log\left(1+\frac{1^5}{n^6}\right)+\log\left(1+\frac{2^5}{n^6}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{n^5}{n^6}\right)=\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k^5}{n^6}\right)$$

ここで，$x=\left(\dfrac{k}{n}\right)^5$ とおくと, $0\leqq x\leqq 1$ となり, (1)より,

$$\frac{1}{n+1}\left(\frac{k}{n}\right)^5\leqq\log\left(1+\frac{k^5}{n^6}\right)\leqq\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5,\quad \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5\leqq\log a_n\leqq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5$$

(2)より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5=1\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$ なので,

$$\lim_{n\to\infty}\log a_n=\frac{1}{6}$$

すると，対数関数は定義域で連続であることより，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=e^{\frac{1}{6}}$ となる。

［解 説］

基本的で，しかも頻出するタイプの融合問題です。しかも，(3)への誘導が，無理のない形になっており，演習する価値のある 1 題です。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1)　石は，時刻$t=0$で点 A にあるので，時刻$t=1$においても点 A にある確率$p_1$は，規則(a)より，$p_1=c$である。

また，時刻$t=1$において，石が点Bにある確率は$1-p_1$より，

$$p_2=cp_1+(1-2c)(1-p_1)=c^2+(1-2c)(1-c)=3c^2-3c+1$$

(2)　石が時刻$t=n$に点Aにあるとき，時刻$t=n+1$にも点Aにある確率は$c$，また時刻$t=n$に点Bにあるとき，時刻$t=n+1$に点Aにある確率は$1-2c$より，

$$p_{n+1}=cp_n+(1-2c)(1-p_n)=(3c-1)\,p_n+(1-2c)\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

(3)　$(*)$を変形すると，$p_{n+1}-\dfrac{1-2c}{2-3c}=(3c-1)\left(p_n-\dfrac{1-2c}{2-3c}\right)$

また，$p_0=1$としたとき，$n=0$のときも$(*)$は成立することより，

$$p_n-\frac{1-2c}{2-3c}=\left(p_0-\frac{1-2c}{2-3c}\right)(3c-1)^n=\frac{1-c}{2-3c}(3c-1)^n$$

よって，$p_n=\dfrac{1-2c}{2-3c}+\dfrac{1-c}{2-3c}(3c-1)^n$

(4)　$0<c<\dfrac{1}{2}$より$-1<3c-1<\dfrac{1}{2}$となり，$n\to\infty$のとき，$(3c-1)^n\to 0$であるので，

$$\lim_{n\to\infty}p_n=\frac{1-2c}{2-3c}$$

［解 説］

有名な漸化式の確率への応用で，その中でも，最も基本的なタイプです。文系に類題が出ています。なお，(3)では，計算を容易にするため，$p_0$を初期値としています。

## $\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=\sqrt{2}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cos120^\circ=-1$ より，

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=2$$

(2)　$|k\vec{a}+l\vec{b}|^2=k^2|\vec{a}|^2+2kl\vec{a}\cdot\vec{b}+l^2|\vec{b}|^2=2(k^2-kl+l^2)$

よって, $k$, $l$ は整数より，$|k\vec{a}+l\vec{b}|^2$ は偶数である。

(3)　(i)　$k$ が奇数, $l$ が奇数のとき

$k^2$，$kl$，$l^2$ はすべて奇数より，$k^2-kl+l^2$ は奇数となるので，$|k\vec{a}+l\vec{b}|^2$ は 4 の倍数ではない。

(ii)　$k$ が奇数, $l$ が偶数のとき

$k^2$ は奇数，$kl$，$l^2$ は偶数より，$k^2-kl+l^2$ は奇数となるので，$|k\vec{a}+l\vec{b}|^2$ は 4 の倍数ではない。

(iii)　$k$ が偶数, $l$ が奇数のとき

$k^2$，$kl$ は偶数，$l^2$ は奇数より，$k^2-kl+l^2$ は奇数となるので，$|k\vec{a}+l\vec{b}|^2$ は 4 の倍数ではない。

(i)～(iii)より, $k$ または $l$ が奇数のとき，$|k\vec{a}+l\vec{b}|^2$ は 4 の倍数ではない。

(4)　まず，$|m\vec{a}+n\vec{b}|$ が整数ならば，$m=n=0$ を証明する。

$|m\vec{a}+n\vec{b}|=\sqrt{2(m^2-mn+n^2)}$ が整数となるためには, (3)より，$m^2-mn+n^2$ が偶数, すなわち $m$, $n$ がともに偶数であることが必要である。

そこで，$m=2m_1$，$n=2n_1$ ($m_1$，$n_1$ は整数)とおくと,

$$|m\vec{a}+n\vec{b}|=2\sqrt{2({m_1}^2-m_1n_1+{n_1}^2)}$$

すると，$|m\vec{a}+n\vec{b}|$ が整数となるためには，$m_1$，$n_1$ がともに偶数であることが必要であり，$k=1,\ 2,\ \cdots$ として，$m_k=2m_{k+1}$，$n_k=2n_{k+1}$ ($m_k$，$n_k$ は整数)とおくと,

$$|m\vec{a}+n\vec{b}|=2^k\sqrt{2({m_k}^2-m_kn_k+{n_k}^2)}$$

これより，$m_k$，$n_k$ がともに偶数であるのは，$m=n=0$ の場合しかありえない。よって，$|m\vec{a}+n\vec{b}|$ が整数ならば，$m=n=0$ である。

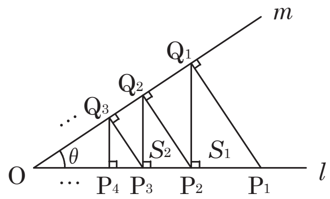
この命題の対偶をとると，$m=n=0$ ではないならば，$|m\vec{a}+n\vec{b}|$ は整数ではない。

### ［解 説］

(4)は, 0 以外の整数を 2 でドンドン割っていくと, いつかは奇数になるということを利用しています。もっと詳しく記述した方がよかったかもしれませんが。

**5**

問題のページへ




(1)　$Q_1P_2 = P_1Q_1\cos\theta$，$P_2Q_2 = Q_1P_2\cos\theta$ より，

$$P_2Q_2 = P_1Q_1\cos^2\theta,\quad \frac{P_2Q_2}{P_1Q_1} = \cos^2\theta$$

(2)　$\triangle P_1Q_1P_2$ と $\triangle P_2Q_2P_3$ は相似なので, (1)より,

$$\frac{S_2}{S_1} = \cos^4\theta$$

(3)　$P_1Q_1 = OP_1\sin\theta = \sin\theta$ より，

$$S_1 = \frac{1}{2}P_1Q_1\cdot Q_1P_2\sin\theta = \frac{1}{2}\sin^3\theta\cos\theta$$

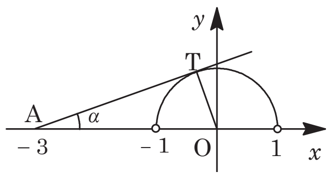
(2)と同様にして，$S_{n+1} = S_n\cos^4\theta$ となり, $0<\cos^4\theta<1$ から,

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}S_n = \frac{S_1}{1-\cos^4\theta} = \frac{\sin^3\theta\cos\theta}{2(1+\cos^2\theta)(1-\cos^2\theta)} = \frac{\sin\theta\cos\theta}{2(1+\cos^2\theta)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\sin 2\theta}{2\left(1+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)} = \frac{\sin 2\theta}{2(3+\cos 2\theta)}$$

(4)　$m = \dfrac{\sin 2\theta}{3+\cos 2\theta} = \dfrac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta-(-3)}$ とおくと，$0<2\theta<\pi$ より，$m$ は点 $A(-3,\ 0)$ と半円 $x^2+y^2=1$ $(y>0)$ 上の点を結ぶ直線の傾きになる。

ここで, $m$ の値が最大となるのは, この直線が円に接するときであり, 接点を T とし, $x$ 軸の正の部分となす角を $\alpha$ とおくと,




$$\tan\alpha = \frac{OT}{AT} = \frac{1}{\sqrt{3^2-1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

よって, (3)より $S = \dfrac{1}{2}m$ なので, $S$ の最大値は, $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{8}$ である。

［解 説］

有名な構図の頻出問題です。(4)では, 微分法の利用が一般的ですが, ここでは分数関数を直線の傾きとしてみる解法を採用しました。