1

解答解説のページへ

関数 $y=x-x^3$ のグラフと，その上の点 $\mathrm{P}(t,\ t-t^3)$，および点 P における接線 l を考える。ただし $t>0$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $y=x-x^3$ の増減を調べ，極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

(2) l と $y=x-x^3$ のグラフの交点を Q とおく。ただし Q は P と異なる点とする。点 Q の x 座標を求めよ。

(3) 三角形 OPQ の面積が 12 となるとき t を求めよ。ただし点 O は原点である。

2

解答解説のページへ

以下のそれぞれの命題が真であるか偽であるかを答え，真の場合は証明を，偽の場合は反例を与えよ。

(1) $x<y$ ならば $x^2<y^2$ である。

(2) $\log_2 x=\log_3 y$ ならば $x\leqq y$ である。

(3) 微分可能な関数 $f(x)$ が $f'(a)=0$ を満たすならば，$f(x)$ は $x=a$ において極値をとる。

(4) n が 2 以上の自然数ならば，$1+2+\cdots+n$ の約数の中に 3 以上の奇数がある。

3

解答解説のページへ

座標平面上の定点 P と，関数 $y=f(x)$ のグラフ上を動く点 Q を考える。このとき，点 P と点 Q の距離 PQ の最小値を，点 P と $y=f(x)$ のグラフの距離と呼ぶことにする。次の問いに答えよ。

(1) 点 $\mathrm{P}_1\left(0,\ \dfrac{1}{3}\right)$ と $y=x^2$ のグラフの距離 d_1 の値を求めよ。

(2) 点 $\mathrm{P}_2\left(0,\ \dfrac{5}{4}\right)$ と $y=x^2$ のグラフの距離 d_2 の値を求めよ。また，$d_2=\mathrm{P}_2\mathrm{R}$ となる $y=x^2$ のグラフ上の点 R をすべて求めよ。

(3) 点 P_2 を中心とする半径 d_2 の円と $y=x^2$ のグラフで囲まれた部分の面積 S を求めよ。

4

解答解説のページへ

四面体 OABC において$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{AOC}=\dfrac{\pi}{2}$, $\angle\mathrm{BOC}=\dfrac{\pi}{3}$, $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=2$, $\mathrm{OC}=1$とする。3 点 A, B, C を通る平面上の点 P を考え, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とするとき, $\vec{p}$は実数 s, t を用いて$\vec{p}=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$と表される。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 内積$\vec{p}\cdot\vec{a}$, $\vec{p}\cdot\vec{b}$, $\vec{p}\cdot\vec{c}$をs, tを用いて表せ。

(2) 点 P が$\angle\mathrm{AOP}=\angle\mathrm{BOP}=\angle\mathrm{COP}$を満たすとき, s, tの値を求めよ。

(3) (2)の条件を満たす点 P について, 直線 AP と直線 BC の交点を Q とする。$\mathrm{BQ}:\mathrm{QC}$を求めよ。

(4) (2)の条件を満たす点 P について, 2 つの四面体 OABP と OACP の体積の比を求めよ。

5

解答解説のページへ

2 人のプレーヤーA, B が対戦を繰り返すゲームを行う。1 回の対戦につき A が勝つ確率は p であり，B が勝つ確率は $1-p$ であるとする(ただし $0<p<1$)。A と B は初めにそれぞれ 2 枚の金貨を持っている。1 回の対戦につき勝者は敗者から 1 枚の金貨を受け取る。対戦を繰り返して一方のプレーヤーがすべての金貨を手に入れたとき，ゲームを終了する。ちょうど n 回の対戦で A がすべての金貨を手に入れる確率を P_n とする。ただし n は自然数とする。

(1)　P_2 と P_4 を求めよ。

(2)　P_{2n-1} を求めよ。

(3)　P_{2n} を求めよ。

(4)　$2n$ 回以内の対戦で A がすべての金貨を手に入れる確率 S_n を求めよ。

1

問題のページへ

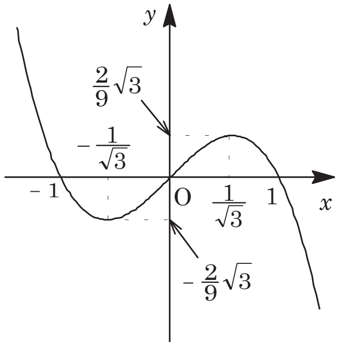
(1)　$y = x - x^3$ ……①に対して,

$$y' = 1 - 3x^2 = -(\sqrt{3}x - 1)(\sqrt{3}x + 1)$$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	$-\frac{2}{9}\sqrt{3}$	↗	$\frac{2}{9}\sqrt{3}$	↘

右表より，極大値 $\frac{2}{9}\sqrt{3}\ \left(x = \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$，極小値 $-\frac{2}{9}\sqrt{3}\ \left(x = -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ である。

また，グラフは右下図のようになる。



(2)　$\mathrm{P}(t,\ t - t^3)$ における接線 l の方程式は,

$$y - (t - t^3) = (1 - 3t^2)(x - t)$$

$$y = (1 - 3t^2)x + 2t^3 \cdots\cdots\cdots ②$$

①②を連立して，$x - x^3 = (1 - 3t^2)x + 2t^3$

$$x^3 - 3t^2x + 2t^3 = 0\,,\ (x - t)^2(x + 2t) = 0$$

よって，点 Q の x 座標は，$x \neq t$ から $x = -2t$ である。

(3)　(2)から，$\mathrm{Q}(-2t,\ -2t + 8t^3)$ となり,

$$\triangle\mathrm{OPQ} = \frac{1}{2}\left|\,t(-2t + 8t^3) - (-2t)(t - t^3)\,\right| = \frac{1}{2}\left|\,6t^4\,\right| = 3t^4$$

条件より，$3t^4 = 12$ すなわち $t^2 = 2$ となる。

すると，$t > 0$ から $t = \sqrt{2}$ である。

［解 説］

有名な構図の頻出基本問題です。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　命題「$x<y$ ならば $x^2<y^2$ 」は偽である。

反例は，$x=-1$ ，$y=0$

(2)　命題「$\log_2 x=\log_3 y$ ならば $x\leqq y$」は偽である。

反例は，$x=\dfrac{1}{2}$，$y=\dfrac{1}{3}$

(3)　命題「微分可能な関数 $f(x)$ が $f'(a)=0$ を満たすならば，$f(x)$ は $x=a$ において極値をとる」は偽である。

反例は，$f(x)=x^3$，$a=0$

(4)　命題「n が 2 以上の自然数ならば，$1+2+\cdots+n$ の約数の中に 3 以上の奇数がある」は真である。

証明は以下のようになる。

$1+2+\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$ から，n，$n+1$ の一方は偶数，もう一方は奇数であり，$1+2+\cdots+n$ は奇数の約数をもつ。

$n\geqq 2$ から最小の奇数は 3 となり，$1+2+\cdots+n$ の約数の中に 3 以上の奇数がある。

［解 説］

命題の真偽の問題ですが，判定がすべて偽とはならないように配慮してあります。

3

問題のページへ

(1)　$Q(t,\ t^2)$ とおくと，$P_1\left(0,\ \dfrac{1}{3}\right)$ から，

$$P_1Q^2=t^2+\left(t^2-\frac{1}{3}\right)^2=t^4+\frac{1}{3}t^2+\frac{1}{9}=\left(t^2+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{12}$$

$t^2\geqq 0$ より，P_1Q^2 は $t^2=0$ のとき最小値 $\dfrac{1}{9}$ をとる。

したがって，$d_1=\sqrt{\dfrac{1}{9}}=\dfrac{1}{3}$ である。

(2)　(1)と同様にして，$P_2\left(0,\ \dfrac{5}{4}\right)$ から，

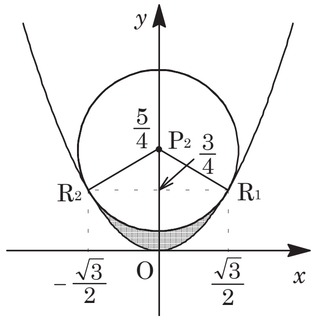
$$P_2Q^2=t^2+\left(t^2-\frac{5}{4}\right)^2=t^4-\frac{3}{2}t^2+\frac{25}{16}=\left(t^2-\frac{3}{4}\right)^2+1$$

$t^2\geqq 0$ より，P_2Q^2 は $t^2=\dfrac{3}{4}\left(t=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ のとき最小値 1 をとる。

したがって，$d_2=1$ であり，$d_2=P_2R$ となる R を R_1，R_2 とすると，

$$R_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{3}{4}\right),\ R_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{3}{4}\right)$$

(3)　$\overrightarrow{P_2R_1}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ から，線分 P_2R_1 と y 軸のなす角は $\dfrac{\pi}{3}$ である。



すると，求める右図の網点部の面積 S は，y 軸に関する対称性に注意して，

$$S=2\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{4}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{\pi}{3}-\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}x^2dx\right\}$$

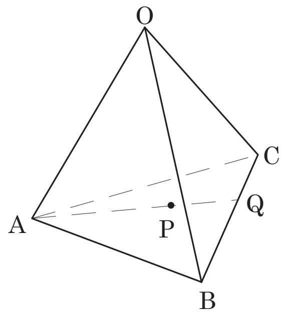
$$=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}-\frac{2}{3}\Big[x^3\Big]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{3}{4}\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$$

［解　説］

円が放物線に接する場合を題材にした有名問題です。

4

問題のページへ



(1) 条件より，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$，$|\vec{c}|=1$ であり，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=0,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=2\cdot1\cdot\cos\frac{\pi}{3}=1$$

すると，$\vec{p}\cdot\vec{a}=\left((1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}\right)\cdot\vec{a}=4(1-s-t)$

$$\vec{p}\cdot\vec{b}=\left((1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}\right)\cdot\vec{b}=4s+t$$

$$\vec{p}\cdot\vec{c}=\left((1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}\right)\cdot\vec{c}=s+t$$

(2) 条件より，$\angle\mathrm{AOP}=\angle\mathrm{BOP}=\angle\mathrm{COP}$ から，

$$\cos\angle\mathrm{AOP}=\cos\angle\mathrm{BOP}=\cos\angle\mathrm{COP}$$

$$\frac{\vec{p}\cdot\vec{a}}{|\vec{p}||\vec{a}|}=\frac{\vec{p}\cdot\vec{b}}{|\vec{p}||\vec{b}|}=\frac{\vec{p}\cdot\vec{c}}{|\vec{p}||\vec{c}|}$$

(1)の結果を用いると，$\dfrac{4(1-s-t)}{2}=\dfrac{4s+t}{2}=s+t$ から，

$$4(1-s-t)=4s+t\ \cdots\cdots\cdots①,\quad 4s+t=2(s+t)\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$s=\dfrac{2}{9}$，$t=\dfrac{4}{9}$

(3) 条件から，$\vec{p}=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$ より，$\vec{p}-\vec{a}=s(\vec{b}-\vec{a})+t(\vec{c}-\vec{a})$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

すると, (2)より，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{4}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{2}{9}k\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{4}{9}k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

点 Q は直線 BC 上にあるので，$\dfrac{2}{9}k+\dfrac{4}{9}k=1$ から，$k=\dfrac{3}{2}$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

よって，$\mathrm{BQ}:\mathrm{QC}=2:1$

(4) まず, 四面体 OABP と OACP の体積比は，△ABP と△ACP の面積比に等しい。さらに，△ABP と△ACP の面積比は，BQ : QC に等しい。

よって, (3)から, 四面体 OABP と OACP の体積比は，2 : 1 である。

［解 説］

空間ベクトルの有名問題です。なお, (3)では k の値を求めましたが, 本問では, この値は不要です。

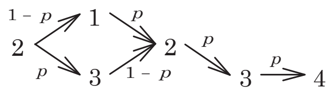
5

問題のページへ

(1)　A の持っている金貨の枚数に注目する。

まず, 2 回の対戦で, A が 4 枚の金貨を手に入れるのは, A の枚数が 2→3→4 となる場合のみであり，その確率 P_2 は，$P_2=p^2$ である。

また, 4 回の対戦で, A が 4 枚の金貨を手に入れるのは，A の枚数が右図のように変化する場合であり，その確率 P_4 は,



$$P_4=2p(1-p)\cdot p^2=2p^3(1-p)$$

(2)　$2n-1$ 回の対戦で, A が 4 枚の金貨を手に入れるのは，$2n-3$ 回まで対戦を繰り返した結果 A の枚数が 2 となり，その後, A が 2 回続けて勝つ場合である。

ところが, A の枚数が 2 となるのは，偶数回の対戦の後だけであるので，このような場合はない。よって，この確率 P_{2n-1} は，$P_{2n-1}=0$ である。

(3)　$2n$ 回の対戦で, A が 4 枚の金貨を手に入れるのは，$2n-2$ 回まで対戦を繰り返した結果 A の枚数が 2 となり，その後, A が 2 回続けて勝つ場合である。この確率 P_{2n} は,

$$P_{2n}=\{2p(1-p)\}^{n-1}\cdot p^2=p^2\{2p(1-p)\}^{n-1}$$

(4)　$2n$ 回以内の対戦で A がすべての金貨を手に入れる確率 S_n は,

$$S_n=P_2+P_4+\cdots+P_{2n}=\frac{p^2\{1-(2p(1-p))^n\}}{1-2p(1-p)}=\frac{p^2-p^2(2p(1-p))^n}{1-2p+2p^2}$$

［解 説］

(1)で具体的に考えた結果を一般化すれば, (4)の結論まで一直線です。