

1

解答解説のページへ

以下のそれぞれの命題が真であるか偽であるかを答え、真の場合は証明を、偽の場合は反例を与えよ。

- (1) すべての 2 行 2 列の行列 A, B に対して、 $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ が成立する。
- (2) 2 行 2 列の行列 A が $A^2 = E$ を満たすならば、 $A = E$ または $A = -E$ である。ただし E は単位行列とする。
- (3) 微分可能な関数 $f(x)$ が $f'(a) = 0$ を満たすならば、 $f(x)$ は $x = a$ において極値をとる。
- (4) n が 2 以上の自然数ならば、 $1+2+\dots+n$ の約数の中に 3 以上の奇数がある。

2

解答解説のページへ

座標平面上の 3 点 $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(x, y)$ を考える。ただし $y > 0$ とする。
次の問いに答えよ。

- (1) $\triangle ABC$ が二等辺三角形であるとする。そのとき x, y が満たす条件を求め、点 C の存在範囲を図示せよ。
- (2) $\triangle ABC$ が鋭角三角形であるとする。そのとき x, y が満たす条件を求め、点 C の存在範囲を図示せよ。
- (3) 3 つの角 $\angle CAB, \angle ABC, \angle BCA$ をそれぞれ α, β, γ とし、不等式

$$\alpha \leq \beta \leq \gamma < \frac{\pi}{2}$$

を満たすとする。そのとき x, y が満たす条件を求め、点 C の存在範囲を図示せよ。

- (4) x, y が(3)の条件を満たすとき、 γ がとりうる値の範囲を求めよ。

3

解答解説のページへ

曲線 $y = e^x$ 上の点 $A(0, 1)$ における接線を l とし、点 $B(0, 2)$ を通り直線 l に平行な直線を m とする。直線 m と曲線 $y = e^x$ の 2 つの交点 P, Q の x 座標をそれぞれ α, β (ただし $\alpha < \beta$) とする。直線 $x = \alpha$ と直線 l の交点を P' 、直線 $x = \beta$ と直線 l の交点を Q' とする。次の問いに答えよ。

- (1) 平行四辺形 $PP'Q'Q$ の面積 S を α, β で表せ。
- (2) 直線 m と曲線 $y = e^x$ によって囲まれる図形の面積 T を α, β の多項式で表せ。
- (3) 線分 PQ の中点 R は第 2 象限にあることを示せ。
- (4) $\alpha + \beta > -1$ であることを示せ。

4

解答解説のページへ

四面体 $OABC$ において $\angle AOB = \angle AOC = \frac{\pi}{2}$, $\angle BOC = \frac{\pi}{3}$, $OA = OB = 2$, $OC = 1$ とする。3 点 A, B, C を通る平面上の点 P を考え、 $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とするとき、 \vec{p} は実数 s, t を用いて $\vec{p} = (1-s-t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$ と表される。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 内積 $\vec{p} \cdot \vec{a}$, $\vec{p} \cdot \vec{b}$, $\vec{p} \cdot \vec{c}$ を s, t を用いて表せ。
- (2) 点 P が $\angle AOP = \angle BOP = \angle COP$ を満たすとき、 s, t の値を求めよ。
- (3) (2)の条件を満たす点 P について、直線 AP と直線 BC の交点を Q , 直線 BP と直線 AC の交点を R とする。 $BQ : QC$ および $AR : RC$ を求めよ。
- (4) (2)の条件を満たす点 P について、3 つの四面体 $OABP$, $OBCP$, $OACP$ の体積の比を求めよ。

5

解答解説のページへ

2人のプレイヤーA, Bが対戦を繰り返すゲームを行う。1回の対戦につきAが勝つ確率は p であり, Bが勝つ確率は $1-p$ であるとする(ただし $0 < p < 1$)。AとBは初めにそれぞれ2枚の金貨を持っている。1回の対戦につき勝者は敗者から1枚の金貨を受け取る。対戦を繰り返して一方のプレイヤーがすべての金貨を手に入れたとき, ゲームを終了する。ちょうど n 回の対戦でAがすべての金貨を手に入れる確率を P_n とする。ただし n は自然数とする。

- (1) P_4 を求めよ。
- (2) P_{2n-1} を求めよ。
- (3) P_{2n} を求めよ。
- (4) $2n$ 回以内の対戦でAがすべての金貨を手に入れる確率 S_n を求めよ。
- (5) $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ とする。 p と S の大小関係を調べよ。

1

問題のページへ

- (1) 命題「すべての 2 行 2 列の行列 A, B に対して、 $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ が成立する」は偽である。

$$\text{反例は、} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (2) 命題「 E を単位行列とすると、2 行 2 列の行列 A が $A^2 = E$ を満たすならば、 $A = E$ または $A = -E$ である」は偽である。

$$\text{反例は、} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- (3) 命題「微分可能な関数 $f(x)$ が $f'(a) = 0$ を満たすならば、 $f(x)$ は $x = a$ において極値をとる」は偽である。

$$\text{反例は、} f(x) = x^3, a = 0$$

- (4) 命題「 n が 2 以上の自然数ならば、 $1+2+\dots+n$ の約数の中に 3 以上の奇数がある」は真である。

証明は以下ようになる。

$$1+2+\dots+n = \frac{1}{2}n(n+1) \text{ から、} n, n+1 \text{ の一方は偶数、もう一方は奇数であり、}$$

$1+2+\dots+n$ は奇数の約数をもつ。

$n \geq 2$ から最小の奇数は 3 となり、 $1+2+\dots+n$ の約数の中に 3 以上の奇数がある。

[解説]

命題の真偽の問題ですが、判定がすべて偽とはならないように配慮してあります。
なお、(3)と(4)は文理共通です。

2

問題のページへ

(1) $\triangle ABC$ が二等辺三角形であるとき, 点 $C(x, y)$ の存在範囲は, $y > 0$ において,

(i) $AC = BC$ のとき

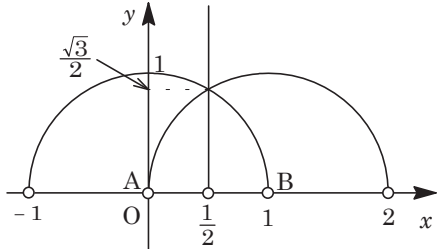
点 C は線分 AB の垂直二等分線 $x = \frac{1}{2}$ 上にある。

(ii) $AB = AC$ のとき

点 C は点 A を中心とする半径 1 の円 $x^2 + y^2 = 1$ 上にある。

(iii) $BC = BA$ のとき

点 C は点 B を中心とする半径 1 の円 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 上にある。



(i)(ii)(iii)より, 点 C は右上図の円または直線上にある。

(2) $\triangle ABC$ が鋭角三角形である条件は,

$$\angle CAB < \frac{\pi}{2} \dots\dots\dots ①, \quad \angle ABC < \frac{\pi}{2} \dots\dots\dots ②, \quad \angle BCA < \frac{\pi}{2} \dots\dots\dots ③$$

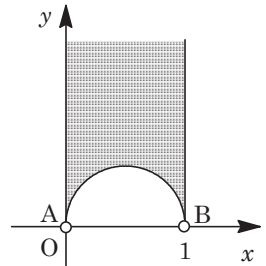
$y > 0$ において, ①②③がすべて成立する点 $C(x, y)$ の存在範囲を求める。

①より, 点 C は y 軸の右側, すなわち領域 $x > 0$ にある。

②より, 点 C は直線 $x = 1$ の左側, すなわち領域 $x < 1$ にある。

③より, 点 C は AB を直径とする円の外部, すなわち領域 $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 > \frac{1}{4}$ にある。

①②③より, 点 C は右図の網点部に存在する。ただし, 境界は領域に含まない。



(3) まず, $\alpha = \angle CAB < \frac{\pi}{2}$, $\beta = \angle ABC < \frac{\pi}{2}$, $\gamma = \angle BCA < \frac{\pi}{2}$ より, 点 C は(2)の領域内に存在する。

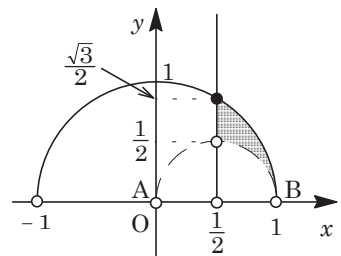
ここで, 条件から, $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ なので, 三角形の角と辺の大小関係を用いると,

$$BC \leq AC \leq AB$$

すると, $BC \leq AC$ から, (1)の結果を利用すると, 点 C は領域 $x \geq \frac{1}{2}$ にある。

また, $AC \leq AB$ から, (1)の結果を利用すると, 点 C は領域 $x^2 + y^2 \leq 1$ にある。

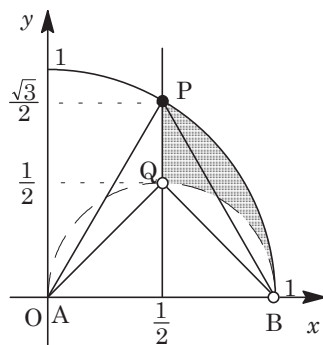
以上より, 点 C は右図の網点部に存在する。ただし, 破線の境界は領域に含まない。



- (4) まず、点 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ とおくと、 $\triangle ABP$ は正三角形となるので、 $\angle APB = \frac{\pi}{3}$ である。

また、 AB を直径とする円周上に点 Q をとると、 $\angle AQB = \frac{\pi}{2}$ である。

すると、点 C が右図の網点部に存在するとき、線分 AB を弦とする円弧を考え、 $\gamma = \angle BCA$ のとりうる値を求めると、右図より、 $\frac{\pi}{3} \leq \gamma < \frac{\pi}{2}$ である。



[解説]

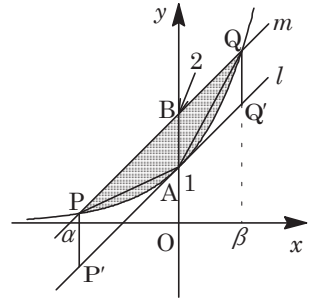
巧みな誘導がついている平面図形と領域の総合問題です。式だけで攻めるのではなく、図形的に解くと、スッキリした解になります。

3

問題のページへ

- (1) 平行四辺形 $PP'Q'Q$ の面積 S は、

$$S = 1 \times (\beta - \alpha) = \beta - \alpha$$
- (2) $y = e^x \cdots \cdots \textcircled{1}$ より、 $y' = e^x$ となり、 $A(0, 1)$ における接線 l の方程式は、 $y = x + 1$ となる。



また、 $B(0, 2)$ を通り l に平行な直線 m は、

$$y = x + 2 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}\textcircled{2}$ を連立して、 $e^x = x + 2$

この方程式の 2 つの解が $x = \alpha, \beta$ より、

$$e^\alpha = \alpha + 2 \cdots \cdots \textcircled{3}, \quad e^\beta = \beta + 2 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

さて、直線 m と曲線 $y = e^x$ によって囲まれる図形の面積 T は、

$$T = \int_{\alpha}^{\beta} (x + 2 - e^x) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - e^x \right]_{\alpha}^{\beta} = \frac{1}{2}(\beta^2 - \alpha^2) + 2(\beta - \alpha) - (e^\beta - e^\alpha)$$

$\textcircled{3}\textcircled{4}$ より、 $e^\beta - e^\alpha = (\beta + 2) - (\alpha + 2) = \beta - \alpha$ となり、

$$T = \frac{1}{2}(\beta^2 - \alpha^2) + 2(\beta - \alpha) - (\beta - \alpha) = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)(\alpha + \beta + 2)$$

- (3) $T < S$ より、 $\frac{1}{2}(\beta - \alpha)(\alpha + \beta + 2) < \beta - \alpha$ となり、 $\beta - \alpha > 0$ から、

$$\alpha + \beta + 2 < 2, \quad \frac{\alpha + \beta}{2} < 0$$

これより、線分 PQ の中点 $R\left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \frac{e^\alpha + e^\beta}{2}\right)$ は、第 2 象限にある。

- (4) $y = e^x$ に対し、 $y'' = e^x > 0$ から、曲線は下に凸になるので、

$$T > \triangle APQ = \frac{1}{2}S$$

よって、 $\frac{1}{2}(\beta - \alpha)(\alpha + \beta + 2) > \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$ から、

$$\alpha + \beta + 2 > 1, \quad \alpha + \beta > -1$$

[解説]

面積を比較して不等式を証明する問題です。ぜひ演習しておいてほしい一題です。

4

問題のページへ

- (1) 条件より, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = 1$ であり,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = 0, \vec{b} \cdot \vec{c} = 2 \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 1$$

すると, $\vec{p} \cdot \vec{a} = ((1-s-t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}) \cdot \vec{a} = 4(1-s-t)$

$$\vec{p} \cdot \vec{b} = ((1-s-t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}) \cdot \vec{b} = 4s + t$$

$$\vec{p} \cdot \vec{c} = ((1-s-t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}) \cdot \vec{c} = s + t$$

- (2) 条件より, $\angle AOP = \angle BOP = \angle COP$ から,

$$\cos \angle AOP = \cos \angle BOP = \cos \angle COP$$

$$\frac{\vec{p} \cdot \vec{a}}{|\vec{p}| |\vec{a}|} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{b}}{|\vec{p}| |\vec{b}|} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{c}}{|\vec{p}| |\vec{c}|}$$

(1)の結果を用いると, $\frac{4(1-s-t)}{2} = \frac{4s+t}{2} = s+t$ から,

$$4(1-s-t) = 4s+t \cdots \cdots \textcircled{1}, 4s+t = 2(s+t) \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}\textcircled{2}$ より, $s = \frac{2}{9}, t = \frac{4}{9}$

- (3) $\vec{p} = (1-s-t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$ より, $\vec{p} - \vec{a} = s(\vec{b} - \vec{a}) + t(\vec{c} - \vec{a})$ となり, (2)から,

$$\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} = \frac{2}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{9}\overrightarrow{AC} \cdots \cdots \textcircled{3}$$

さて, $\overrightarrow{AQ} = k\overrightarrow{AP}$ とおくと, $\textcircled{3}$ から, $\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{9}k\overrightarrow{AB} + \frac{4}{9}k\overrightarrow{AC}$

Q は直線 BC 上にあるので, $\frac{2}{9}k + \frac{4}{9}k = 1$ から $k = \frac{3}{2}$ となり,

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}, BQ : QC = 2 : 1$$

同様にして, $\overrightarrow{AR} = (1-l)\overrightarrow{AB} + l\overrightarrow{AP}$ とおくと, $\textcircled{3}$ から, $\overrightarrow{AR} = (1 - \frac{7}{9}l)\overrightarrow{AB} + \frac{4}{9}l\overrightarrow{AC}$

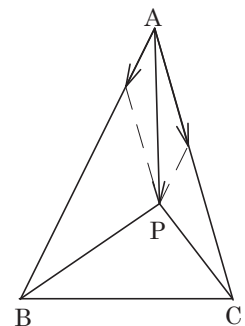
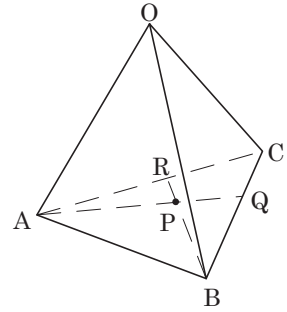
R は直線 AC 上にあるので, $1 - \frac{7}{9}l = 0$ から $l = \frac{9}{7}$ となり,

$$\overrightarrow{AR} = \frac{4}{7}\overrightarrow{AC}, AR : RC = 4 : 3$$

- (4) $\triangle ABP, \triangle BCP, \triangle CAP$ の面積比は, $\textcircled{3}$ より,

$$\frac{4}{9} : (1 - \frac{4}{9} - \frac{2}{9}) : \frac{2}{9} = 4 : 3 : 2$$

これより, 3つの四面体 OABP, OBCP, OCAP の体積比は, 4 : 3 : 2 である。



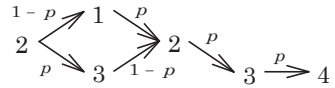
[解説]

空間ベクトルの有名問題です。なお, $\textcircled{3}$ 式の係数に $\triangle ABC$ との面積比が明示されていますので, (4)では, (3)の結果を利用しない方がストレートです。

5

問題のページへ

- (1) A の持っている金貨の枚数に注目する。4 回の対戦で、A が 4 枚の金貨を手に入れるのは、A の枚数が右図のように変化する場合であり、その確率 P_4 は、



$$P_4 = 2p(1-p) \cdot p^2 = 2p^3(1-p)$$

- (2) $2n-1$ 回の対戦で、A が 4 枚の金貨を手に入れるのは、 $2n-3$ 回まで対戦を繰り返した結果 A の枚数が 2 となり、その後、A が 2 回続けて勝つ場合である。

ところが、A の枚数が 2 となるのは、偶数回の対戦の後だけであるので、このような場合はない。よって、この確率 P_{2n-1} は、 $P_{2n-1} = 0$ である。

- (3) $2n$ 回の対戦で、A が 4 枚の金貨を手に入れるのは、 $2n-2$ 回まで対戦を繰り返した結果 A の枚数が 2 となり、その後、A が 2 回続けて勝つ場合である。この確率 P_{2n} は、

$$P_{2n} = \{2p(1-p)\}^{n-1} \cdot p^2 = p^2 \{2p(1-p)\}^{n-1}$$

- (4) $2n$ 回以内の対戦で A がすべての金貨を手に入れる確率 S_n は、

$$S_n = P_2 + P_4 + \dots + P_{2n} = \frac{p^2 \{1 - (2p(1-p))^n\}}{1 - 2p(1-p)} = \frac{p^2 - p^2(2p(1-p))^n}{1 - 2p + 2p^2}$$

- (5) $2p(1-p) = -2p^2 + 2p = -2\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$ より、 $0 < p < 1$ で、 $0 < 2p(1-p) \leq \frac{1}{2}$ これより、 $n \rightarrow \infty$ のとき、 $(2p(1-p))^n \rightarrow 0$ となることより、

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{p^2}{1 - 2p + 2p^2}$$

$$\text{すると、} S - p = \frac{p^2}{1 - 2p + 2p^2} - p = \frac{p(-2p^2 + 3p - 1)}{1 - 2p + 2p^2} = \frac{p(1-p)(2p-1)}{1 - 2p + 2p^2}$$

$$\text{よって、} 0 < p < \frac{1}{2} \text{ のとき } S < p, \quad p = \frac{1}{2} \text{ のとき } S = p, \quad \frac{1}{2} < p < 1 \text{ のとき } S > p$$

【解説】

(1)で具体的に考えた結果を一般化すれば、(4)の結論まで一直線です。なお、この(4)までは文理共通です。