1

解答解説のページへ

k は定数で，$k>0$ とする。曲線 $C: y=kx^2\ (x\geqq 0)$ と 2 つの直線 $l: y=kx+\dfrac{1}{k}$，$m: y=-kx+\dfrac{1}{k}$ との交点の x 座標をそれぞれ α，$\beta\ (0<\beta<\alpha)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\alpha-\beta$ の値を求めよ。

(2) $\alpha\beta$，$\alpha^2+\beta^2$ および $\alpha^3-\beta^3$ を k を用いて表せ。

(3) 曲線 C と 2 直線 l，m とで囲まれた部分の面積を最小にする k の値を求めよ。また，そのときの面積を求めよ。

2

解答解説のページへ

座標平面上に点 O$(0,\ 0)$ と点 P$(4,\ 3)$ をとる。不等式 $(x-5)^2+(y-10)^2 \leqq 16$ の表す領域を D とする。次の問いに答えよ。

(1) k は定数とする。直線 $y=-\dfrac{4}{3}x+k$ 上の点を Q とするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を k を用いて表せ。

(2) 点 R が D 全体を動くとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ の最大値および最小値を求めよ。

3

解答解説のページへ

p, a を実数の定数とする。多項式$P(x)=x^3-(2p+a)x^2+(2ap+1)x-a$を$x-3$で割った余りが$10-6p$であり，3 次方程式$P(x)=0$の実数解は a のみとする。次の問いに答えよ。

(1)　実数の範囲で$P(x)$を因数分解せよ。

(2)　aの値を求めよ。

(3)　関数$y=P(x)$が極値をもたないときのpの値を求めよ。

4

解答解説のページへ

n は 2 以上の自然数とする。袋の中に 1 から n までの数字が 1 つずつ書かれた n 個の玉が入っている。この袋から無作為に玉を 1 個取り出し，それに書かれている数を自分の得点としたのち，取り出した玉を袋に戻す。この試行を A，B，C の 3 人が順に行い，3 人の中で最大の得点の人を勝者とする。たとえば，A，B，C の得点がそれぞれ 4, 2, 4 のときは A と C の 2 人が勝者であり，3 人とも同じ得点のときは A, B, C の 3 人とも勝者である。勝者が k 人 $(k=1,\ 2,\ 3)$ である確率を $P_n(k)$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) 勝者が 3 人である確率 $P_n(3)$ を n を用いて表せ。

(2) $n=3$ の場合に勝者が 2 人である確率 $P_3(2)$ を求めよ。

(3) 勝者が 1 人である確率 $P_n(1)$ を n を用いて表せ。

5

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1) x, y が 4 で割ると 1 余る自然数ならば，積 xy も 4 で割ると 1 余ることを証明せよ。

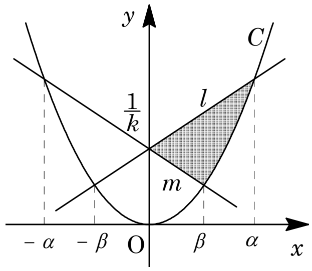
(2) 0 以上の偶数 n に対して，3^n を 4 で割ると 1 余ることを証明せよ。

(3) 1 以上の奇数 n に対して，3^n を 4 で割った余りが 1 でないことを証明せよ。

(4) m を 0 以上の整数とする。3^{2m} の正の約数のうち 4 で割ると 1 余る数全体の和を m を用いて表せ。

1

問題のページへ



(1)　曲線 $y=kx^2$ は y 軸対称であり，また直線 $l: y=kx+\dfrac{1}{k}$ と $m: y=-kx+\dfrac{1}{k}$ は y 軸対称である。

そこで，$C: y=kx^2\ (x \geqq 0)$ と l，m の交点の x 座標をそれぞれ α，β とすると，曲線 $y=kx^2$ と l との交点の x 座標は，α，$-\beta$ となる。

さて，$y=kx^2$ と $y=kx+\dfrac{1}{k}$ を連立して，

$$kx^2=kx+\frac{1}{k},\ \ k^2x^2-k^2x-1=0\cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$の解が $x=\alpha$，$-\beta$ となるので，$\alpha-\beta=\dfrac{k^2}{k^2}=1$

(2)　(1)と同様にして，$(*)$から，$\alpha(-\beta)=-\dfrac{1}{k^2}$ より，$\alpha\beta=\dfrac{1}{k^2}$

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta=1+\frac{2}{k^2}$$

$$\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)=1+\frac{3}{k^2}$$

(3)　曲線 C と 2 直線 l, m とで囲まれた部分の面積を S とすると，(1), (2)より，

$$S=\frac{1}{2}\left(k\alpha^2+\frac{1}{k}\right)\alpha-\frac{1}{2}\left(k\beta^2+\frac{1}{k}\right)\beta-\int_\beta^\alpha kx^2dx$$

$$=\frac{1}{2}k(\alpha^3-\beta^3)+\frac{1}{2k}(\alpha-\beta)-\frac{k}{3}(\alpha^3-\beta^3)=\frac{1}{6}k(\alpha^3-\beta^3)+\frac{1}{2k}(\alpha-\beta)$$

$$=\frac{1}{6}k\left(1+\frac{3}{k^2}\right)+\frac{1}{2k}=\frac{1}{6}k+\frac{1}{k}$$

ここで，相加平均と相乗平均の関係より，$\dfrac{1}{6}k+\dfrac{1}{k}\geqq 2\sqrt{\dfrac{1}{6}k\cdot\dfrac{1}{k}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

なお，等号は $\dfrac{1}{6}k=\dfrac{1}{k}$ すなわち $k=\sqrt{6}$ のとき成立する。

よって，$k=\sqrt{6}$ のとき，S は最小値 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ をとる。

［解 説］

微積分の総合問題で，対称性への着目がポイントとなっています。なお，(3)は(2)の利用を考えて，台形の面積を使っています。

2

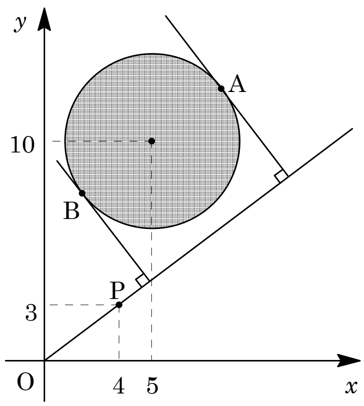
問題のページへ

(1)　直線 $y=-\dfrac{4}{3}x+k$ 上の点 Q の x 座標を t とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(t,\ -\dfrac{4}{3}t+k\right)$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(4,\ 3)$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=4t+3\left(-\frac{4}{3}t+k\right)=3k$$

(2)　まず，直線 OP の方程式は，$y=\dfrac{3}{4}x$ であり，この直線と直交する直線の方程式は，

$$y=-\frac{4}{3}x+k,\ 4x+3y-3k=0\cdots\cdots\cdots(*)$$



さて，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ のなす角を θ，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ 方向への正射影ベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ とするとき，θ が鋭角ならば，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OR}}|\cos\theta=5|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$$

ここで，点 R は，領域 $(x-5)^2+(y-10)^2\leqq16$ にあるので，右図から，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ が最大となるのは点 R が点 A に一致するときであり，また最小となるのは点 R が点 B に一致するときである。

いずれの場合も，直線$(*)$は円 $(x-5)^2+(y-10)^2=16$ に接することより，

$$\frac{|4\cdot5+3\cdot10-3k|}{\sqrt{4^2+3^2}}=4,\ |50-3k|=20$$

これより，$3k=70,\ 30$ となるので，(1)の結果を利用すると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=70,\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=30$$

すなわち，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ の最大値は 70，最小値は 30 である。

［解　説］

よく見かける内積の最大・最小の問題ですが，(1)が(2)への秀逸な誘導となっています。演習の価値ある 1 題です。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1)　$P(x)=x^3-(2p+a)x^2+(2ap+1)x-a$ に対し，条件より，

$$P(3)=10-6p\cdots\cdots\text{①},\quad P(a)=0\cdots\cdots\text{②}$$

②より，$P(x)$ を $x-a$ で割ると，$P(x)=(x-a)(x^2-2px+1)$

ここで，$P(x)=0$ の実数解は a のみより，$x^2-2px+1=0$ が重解 $x=a$ をもつ場合を考えると，

(i)　$a=p=1$ のとき

$P(x)=(x-1)^3$ となり，$P(3)=8$ から，①を満たさない。

(ii)　$a=p=-1$ のとき

$P(x)=(x+1)^3$ となり，$P(3)=64$ から，①を満たさない。

(i)(ii)より，$P(x)=(x-a)(x^2-2px+1)$

(2)　(1)より，$x^2-2px+1=0$ は虚数解をもつことより，

$$D/4=p^2-1<0,\quad -1<p<1\cdots\cdots\text{③}$$

①より，$(3-a)(9-6p+1)=10-6p$

③から $10-6p\neq 0$ なので，$3-a=1$ となり，$a=2$

(3)　(2)より，$P(x)=x^3-(2p+2)x^2+(4p+1)x-2$ となり，

$$P'(x)=3x^2-2(2p+2)x+(4p+1)$$

関数 $y=P(x)$ が極値をもたない条件は，つねに $P'(x)\geqq 0$ であることより，

$$D/4=(2p+2)^2-3(4p+1)\leqq 0,\quad 4p^2-4p+1\leqq 0$$

これより，$(2p-1)^2\leqq 0$ となり，$p=\dfrac{1}{2}$ である。

なお，この値は③を満たしている。

［解　説］

剰余の定理と微分法の応用を組み合わせた問題です。なお，(1)は用心深く書いていますが，冒頭の 3 行だけでも構わないでしょう。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　勝者が 3 人であるのは, 3 人とも同じ得点のときより，その確率 $P_n(3)$ は,

$$P_n(3)=\frac{n}{n^3}=\frac{1}{n^2}$$

(2)　$n=3$ の場合，勝者が 2 人であるのは，まず勝者の選び方が ${}_3\mathrm{C}_2=3$ 通り。次に，得点を 2 つ選び，大きい方を勝者の得点に対応させると，その対応は ${}_3\mathrm{C}_2=3$ 通りとなる。これより，勝者が 2 人である確率 $P_3(2)$ は,

$$P_3(2)=\frac{3\times 3}{3^3}=\frac{1}{3}$$

(3)　勝者が 2 人である確率は, (2)と同様に考えると,

$$P_n(2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times {}_n\mathrm{C}_2}{n^3}=\frac{3n(n-1)}{2n^3}=\frac{3(n-1)}{2n^2}$$

すると，勝者が 1 人である確率 $P_n(1)$ は，余事象を考えて,

$$P_n(1)=1-P_n(3)-P_n(2)=1-\frac{1}{n^2}-\frac{3(n-1)}{2n^2}=\frac{(2n-1)(n-1)}{2n^2}$$

［解　説］

確率の基本問題です。(3)は(2)を誘導と考えて解いています。

5

問題のページへ

(1)　条件より, k, l を 0 以上の整数として，$x=4k+1$，$y=4l+1$ と表すと,

$$xy=(4k+1)(4l+1)=4(4kl+k+l)+1$$

よって，積 xy は 4 で割ると 1 余る。

(2)　条件より，$n=2k$ とおくと, $k\geqq 1$ のとき，二項定理より,

$$3^n=3^{2k}=9^k=(8+1)^k=8^k+{}_k\mathrm{C}_1 8^{k-1}+{}_k\mathrm{C}_2 8^{k-2}+\cdots+{}_k\mathrm{C}_{k-1}8+1$$

$8^k+{}_k\mathrm{C}_1 8^{k-1}+{}_k\mathrm{C}_2 8^{k-2}+\cdots+{}_k\mathrm{C}_{k-1}8$ は 4 の倍数より，3^n は 4 で割ると 1 余る。

なお，$n=0$ のときは $3^n=1$ から，このときも 4 で割ると 1 余る。

(3)　条件より，$n=2k+1$ とおき，また N を整数とすると, (2)から，$3^{2k}=4N+1$

$$3^n=3^{2k+1}=3\cdot 3^{2k}=3(4N+1)=4\cdot 3N+3$$

よって，3^n を 4 で割った余りは 3 となり, 1 ではない。

(4)　3^{2m} の正の約数は，1，3，3^2，3^3，…，3^{2m-1}，3^{2m} であり，この中で 4 で割ると 1 余る数は, (2), (3)の結果より，1，3^2，3^4，…，3^{2m} =1，9，9^2，…，9^m である。

すると，この数の和を S_m とおくと,

$$S_m=1+9+9^2+\cdots+9^m=\frac{9^{m+1}-1}{9-1}=\frac{1}{8}(9^{m+1}-1)$$

［解 説］

整数についての基本問題です。(2)は，初めに考えた二項定理で記述していますが, (1)の利用を考えると数学的帰納法でしょう。