1　解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　$\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ の整数部分を a, 小数部分を b とする。不等式 $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}<\dfrac{6}{a}+\dfrac{k}{b}$ を満たす k の値の範囲を求めよ。

(2)　a, b は定数で, $a>0$ とする。2 次関数 $f(x)=ax^2-2x+b$ の定義域を $-1\leqq x\leqq 2$ とし, $f(-1)<f(2)$ を満たすとする。関数 $y=f(x)$ の値域が $-1\leqq y\leqq 7$ であるとき, 定数 a, b の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　$\log_2 3 = \dfrac{m}{n}$ を満たす自然数 m, n は存在しないことを証明せよ。

(2)　$p,\ q$ を異なる自然数とするとき，$p\log_2 3$ と $q\log_2 3$ の小数部分は等しくないことを証明せよ。

(3)　$\log_2 3$ の値の小数第 1 位を求めよ。

3

解答解説のページへ

放物線 $F: y=\frac{1}{2}(x+1)^2$ 上の点 $\mathrm{A}\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$ を通り，A における F の接線に垂直な直線を l とし，l と放物線 F との交点のうち点 A と異なる方を $\mathrm{B}\left(b,\ \frac{1}{2}(b+1)^2\right)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 直線 l の方程式と b の値を求めよ。

(2) 放物線 F と直線 l で囲まれた部分の面積 T_1 を求めよ。

(3) 線分 AB を直径とする円を C とする。このとき，不等式 $y \leqq \frac{1}{2}(x+1)^2$ の表す領域で円 C の内部にある部分の面積 T_2 を求めよ。

4

解答解説のページへ

平面上で，線分 AB を$1:2$に内分する点を O，線分 AB を$1:4$に外分する点を C とする。P を直線 AB 上にない点とし，$\overrightarrow{\mathrm{PO}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ が垂直であるとする。$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\vec{b}$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PO}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を $|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$ で表せ。

(3) $\mathrm{PA}=1$，$\triangle\mathrm{PAB}$ の面積が $\dfrac{3}{2}$ のとき，PB の長さを求めよ。

$\boxed{5}$ 解答解説のページへ

さいころを n 回投げる。k 回目 $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ に投げた結果,

1 または 2 の目が出たとき $X_k=2$

3 または 4 の目が出たとき $X_k=3$

5 または 6 の目が出たとき $X_k=5$

とする。これらの積を $Y=X_1X_2\cdots X_n$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　$n=5$ のとき, Y が偶数になる確率 p_1 を求めよ。

(2)　$n=5$ のとき, Y が 100 の倍数になる確率 p_2 を求めよ。

(3)　$n=2$ のとき, Y の期待値 E を求めよ。

1

問題のページへ

(1) $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$ で，$1<\sqrt{3}<2$ から，整数部分 $a=3$，小数部分 $b=\sqrt{3}-1$ である。

すると，$\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}<\dfrac{6}{a}+\dfrac{k}{b}$ より，

$$k>b\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}-\frac{6}{a}\right)=(\sqrt{3}-1)(2+\sqrt{3}-2)=3-\sqrt{3}$$

(2) $f(x)=ax^2-2x+b=a\left(x-\dfrac{1}{a}\right)^2-\dfrac{1}{a}+b$ となり，$a>0$ で $f(-1)<f(2)$ から，

$$0<\frac{1}{a}<\frac{-1+2}{2}，\ a>2 \cdots\cdots\cdots①$$

さて，$y=f(x)$ は，$-1\leqq x\leqq 2$ のとき $-1\leqq y\leqq 7$ であることより，

$$f(2)=4a+b-4=7，\ b=11-4a \cdots\cdots\cdots②$$

$$f\left(\frac{1}{a}\right)=-\frac{1}{a}+b=-1，\ b=\frac{1}{a}-1 \cdots\cdots\cdots③$$

②③より，$11-4a=\dfrac{1}{a}-1$，$4a^2-12a+1=0$ となり，①から，

$$a=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}，\ b=11-4\cdot\frac{3+2\sqrt{2}}{2}=5-4\sqrt{2}$$

［解 説］

(2)では，最初，場合分けが必要かとも思いましたが，$f(-1)<f(2)$ から，それが回避できました。

2

問題のページへ

(1)　自然数 m, n に対して，$\log_2 3=\dfrac{m}{n}$ と仮定すると，

$$2^{\frac{m}{n}}=3,\ 2^m=3^n\cdots\cdots\cdots①$$

すると，①は左辺が偶数，右辺が奇数となり成立しない。

したがって，$\log_2 3=\dfrac{m}{n}$ を満たす自然数 m, n は存在しない。

(2)　p, q を異なる自然数とし，$p\log_2 3$ と $q\log_2 3$ の小数部分が等しいと仮定する。

ここで，$p>q$ としても一般性を失わないので，l を自然数として，

$$p\log_2 3-q\log_2 3=l,\ \log_2 3=\frac{l}{p-q}\cdots\cdots\cdots②$$

これは，(1)の結論に反するので，$p\log_2 3$ と $q\log_2 3$ の小数部分は等しくない。

(3)　まず，$\log_2 8<\log_2 9$ より，$\log_2 2^3<\log_2 3^2$，$3<2\log_2 3$ となり，

$$1.5<\log_2 3\cdots\cdots\cdots③$$

また，$\log_2 243<\log_2 256$ より，$\log_2 3^5<\log_2 2^8$，$5\log_2 3<8$ となり，

$$\log_2 3<1.6\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$\log_2 3$ の値の小数第 1 位は 5 である。

［解　説］

(1)と(2)はつながっているものの，(3)は独立の設問です。2 の累乗を 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, …, 3 の累乗を 3, 9, 27, 81, 243, …と書き並べて，評価式を考えました。

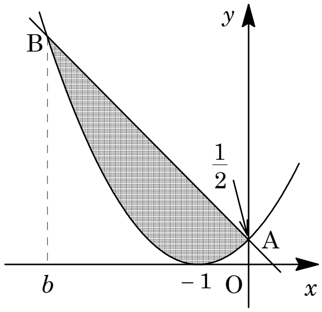
3

問題のページへ

(1)　$F: y=\dfrac{1}{2}(x+1)^2$ ……①に対し，$y'=x+1$

すると，$\mathrm{A}\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$における接線の傾きは 1 から，直線 l の傾きは-1となり，その方程式は，

$$l: y=-x+\frac{1}{2}\ \cdots\cdots\cdots②$$



①②より，$\dfrac{1}{2}(x+1)^2=-x+\dfrac{1}{2}$，$x^2+4x=0$ となり，

$$x=0,\ -4$$

よって，$b\neq 0$から，$b=-4$である。

(2)　放物線 F と直線 l で囲まれた部分の面積 T_1 は，

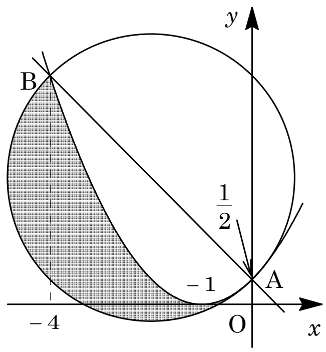
$$T_1=\int_{-4}^{0}\left\{-x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(x+1)^2\right\}dx=-\frac{1}{2}\int_{-4}^{0}x(x+4)\,dx$$

$$=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\right)(0+4)^3=\frac{16}{3}$$

(3)　$\mathrm{A}\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\mathrm{B}\left(-4,\ \dfrac{9}{2}\right)$を直径の両端とする円 C の方程式は，

$$x(x+4)+\left(y-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{9}{2}\right)=0$$

$$x^2+4x+y^2-5y+\frac{9}{4}=0\ \cdots\cdots\cdots③$$



①③より，$x^2+4x+\dfrac{1}{4}(x+1)^4-\dfrac{5}{2}(x+1)^2+\dfrac{9}{4}=0$

$$x^4+4x^3=0,\ x=0,\ -4$$

これより，放物線 F と円 C との共有点は，2 点 A, B のみである。

よって，放物線 F の下側で円 C の内部にある部分の面積 T_2 は，C の直径 $\mathrm{AB}=4\sqrt{2}$ から，

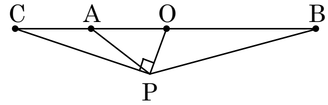
$$T_2=\frac{1}{2}\pi(2\sqrt{2})^2-T_1=4\pi-\frac{16}{3}$$

［解　説］

放物線 F と円 C との共有点は，2 点 A, B だけというのは推測できますが，式で確認しておきました。計算が少々面倒でしたが。

$\boxed{4}$

問題のページへ



(1)　線分 AB を$1:2$に内分する点が O，$1:4$に外分する点が C より，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\vec{b}$とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{PO}}=\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3},\ \overrightarrow{\mathrm{PC}}=\frac{4\vec{a}-\vec{b}}{3}$$

(2)　条件より，$\overrightarrow{\mathrm{PO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}=0$なので, (1)より，$(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(4\vec{a}-\vec{b})=0$

$$8|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2=0,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{-8|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2}{2}\cdots\cdots\cdots①$$

(3)　条件より，$|\vec{a}|=1$……②であり，また$\triangle\mathrm{PAB}=\frac{3}{2}$から，

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\frac{3}{2},\ |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=9\cdots\cdots\cdots③$$

①②を③に代入すると，$|\vec{b}|^2-\dfrac{(-8+|\vec{b}|^2)^2}{4}=9$となり，

$$|\vec{b}|^4-20|\vec{b}|^2+100=0,\ (|\vec{b}|^2-10)^2=0$$

よって，$|\vec{b}|^2=10$から$|\vec{b}|=\sqrt{10}$，すなわち$\mathrm{PB}=\sqrt{10}$である。

［解　説］

平面ベクトルの基本題です。それにしても三角形の面積公式はよく出題されます。

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1)　まず，$X_k=2, 3, 5$ になる確率は，それぞれ $\dfrac{1}{3}$ ずつである。

さて，$Y=X_1X_2X_3X_4X_5$ が奇数となるのは，X_1，X_2，X_3，X_4，X_5 がすべて奇数，すなわち 3 または 5 のときであり，その確率は $\left(\dfrac{2}{3}\right)^5$ である。

これより，Y が偶数になる確率 p_1 は，$p_1=1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^5=\dfrac{211}{243}$

(2)　$Y=X_1X_2X_3X_4X_5$ が 100 の倍数になるのは，X_1，X_2，X_3，X_4，X_5 のうち，2 が少なくとも 2 回，5 が少なくとも 2 回のときより，その確率 p_2 は，

(i)　$X_k=2$ が 2 回，$X_k=5$ が 3 回のとき　${}_5\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{10}{243}$

(ii)　$X_k=2$ が 3 回，$X_k=5$ が 2 回のとき　${}_5\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{10}{243}$

(iii)　$X_k=2$ が 2 回，$X_k=5$ が 2 回，$X_k=3$ が 1 回のとき

$${}_5\mathrm{C}_2\,{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{1}{3}=\frac{30}{243}$$

(i)(ii)(iii)より，$p_2=\dfrac{10}{243}+\dfrac{10}{243}+\dfrac{30}{243}=\dfrac{50}{243}$

(3)　$Y=X_1X_2$ のとき，Y のとりうる値は，

2^2，3^2，5^2，$2\cdot3$，$2\cdot5$，$3\cdot5$

Y	4	6	9	10	15	25
$P(Y)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

これより，Y の期待値 E は，

$$E=4\times\frac{1}{9}+6\times\frac{2}{9}+9\times\frac{1}{9}+10\times\frac{2}{9}+15\times\frac{2}{9}+25\times\frac{1}{9}=\frac{100}{9}$$

［解　説］

設問が $n=5$ と $n=2$ の場合だけというのは意外です。理系の確率の問題は全く別の設定ですし。