1　解答解説のページへ

実数 a, b に対して, 2 次正方行列 A と列ベクトル B を

$$A=\begin{pmatrix} a & 2-a \\ 1+a & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2b \\ b \end{pmatrix}$$

と定め, $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。等式

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+B$$

により, 座標平面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ に対し点 $\mathrm{P}'(x',\ y')$ が定まるものとする。次の問いに答えよ。

(1)　$a=b=-1$ のとき, 点 $\mathrm{P}'(3,\ 2)$ となる点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を求めよ。

(2)　$A^2=kE$ (kは実数)を満たすとき, a, k の値を求めよ。

(3)　どんな点 P に対しても点 P$'$ が原点 O に一致しないための a, b の条件を求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　$\log_2 3 = \dfrac{m}{n}$ を満たす自然数 $m,\ n$ は存在しないことを証明せよ。

(2)　$p,\ q$ を異なる自然数とするとき，$p\log_2 3$ と $q\log_2 3$ の小数部分は等しくないことを証明せよ。

(3)　$\log_2 3$ の値の小数第 1 位を求めよ。

3

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　$a,\ b,\ c$ を定数とする。関数 $f(x)=a\cos^2 x+2b\cos x\sin x+c\sin^2 x$ が定数となるための a, b, c の条件を求めよ。

(2)　関数 $g(x)=4\cos^2 x+2\cos x\sin x+\sin^2 x-\dfrac{5}{2}\ \left(-\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}\right)$ が最大値をとる x の値を θ とする。$\cos 2\theta$，$\sin 2\theta$ の値を求めよ。

(3)　(2)の関数 $g(x)$ と θ に対して，定積分 $\displaystyle\int_0^{\theta} g(x)\,dx$ を求めよ。

4

解答解説のページへ

平面上で，線分 AB を$1:2$に内分する点を O とし，O を中心とする半径 OB の円を S，円 S と直線 AB との交点のうち点 B と異なる方を C とする。点 P は円 S の内部にあり，線分 BC 上にないものとする。円 S と直線 PB との交点のうち点 B と異なる方を Q とする。$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\vec{b}$，$\angle\mathrm{APB}=\theta$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PO}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(2)　点 P が円 S の内部にあることを用いて，$\cos\theta<\dfrac{|\vec{b}|}{4|\vec{a}|}$ を証明せよ。

(3)　PQ の長さを $|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$，θ で表せ。

(4)　$\mathrm{PA}=3$，$\mathrm{PB}=2$ とする。$\triangle\mathrm{QAB}=3\triangle\mathrm{POB}$ を満たすとき，$\triangle\mathrm{PAB}$ の面積を求めよ。

5

解答解説のページへ

△ABC の頂点は反時計回りに A, B, C の順に並んでいるとする。点 A を出発した石が, 次の規則で動くとする。

コインを投げて表が出たとき反時計回りに隣の頂点に移り, 裏がでたときは動かない。なお, コインを投げて表と裏の出る確率はそれぞれ$\dfrac{1}{2}$とする。

コインを n 回投げたとき, 石が点 A, B, C にある確率をそれぞれa_n，b_n，c_nとする。次の問いに答えよ。

(1)　a_1，b_1，c_1の値を求めよ。

(2)　a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1}をa_n，b_n，c_nで表せ。また，a_2，b_2，c_2およびa_3，b_3，c_3の値を求めよ。

(3)　a_n，b_n，c_nのうち 2 つの値が一致することを証明せよ。

(4)　(3)において一致する値をp_nとする。p_nを n で表せ。

1

問題のページへ

(1)　$a=b=-1$，$\mathrm{P}'(3,\ 2)$ のとき，$\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&3\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ より，

$$\begin{pmatrix}-1&3\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&3\\0&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}2&-3\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$$

よって，$\mathrm{P}\left(-\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$ となる。

(2)　$A=\begin{pmatrix}a&2-a\\1+a&2\end{pmatrix}$ から，$\det A=2a-(2-a)(1+a)=a^2+a-2$ となり，

$$A^2-(a+2)A+(a^2+a-2)E=O$$

条件より，$A^2=kE$ なので，$-(a+2)A+(k+a^2+a-2)E=O$ ………①

(i)　$a+2=0$ $(a=-2)$ のとき　①に代入すると，$kE=O$ となり，$k=0$

(ii)　$a+2\neq 0$ $(a\neq -2)$ のとき　①より，$A=\dfrac{k+a^2+a-2}{a+2}E$ となる。

しかし，$2-a=1+a=0$ を満たす a は存在しないので，不適である。

(i)(ii)より，$a=-2$，$k=0$

(3)　点 P' が原点 O に一致すると，$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+B$ より，$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=-B$ ………②

(i)　$\det A=a^2+a-2\neq 0$ $(a\neq 1$ かつ $a\neq -2)$ のとき

②より，$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=-A^{-1}B$ となり，P' が O に一致する点 P は存在する。

(ii)　$\det A=a^2+a-2=0$ $(a=1$ または $a=-2)$ のとき

(ii-a)　$a=1$ のとき　②より，$\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}2b\\b\end{pmatrix}$ となり，

$$x+y=-2b,\ 2x+2y=-b$$

これより，$b=0$ のとき，②を満たす点 P は直線 $x+y=0$ 上にある。

また，$b\neq 0$ のとき，②を満たす点 P は存在しない。

(ii-b)　$a=-2$ のとき　②より，$\begin{pmatrix}-2&4\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}2b\\b\end{pmatrix}$ となり，

$$-2x+4y=-2b,\ -x+2y=-b$$

これより，②を満たす点 P は直線 $-x+2y=-b$ 上にある。

(i)(ii)より，どんな点 P に対しても P' が O に一致しない条件は，$a=1$，$b\neq 0$

［解 説］

行列について，基本的な 3 つの設問で構成されています。ただ，誘導の形式ではありません。

2

問題のページへ

(1)　自然数 m, n に対して，$\log_2 3=\dfrac{m}{n}$ と仮定すると，

$$2^{\frac{m}{n}}=3,\ 2^m=3^n\cdots\cdots\cdots①$$

すると，①は左辺が偶数，右辺が奇数となり成立しない。

したがって，$\log_2 3=\dfrac{m}{n}$ を満たす自然数 m, n は存在しない。

(2)　p, q を異なる自然数とし，$p\log_2 3$ と $q\log_2 3$ の小数部分が等しいと仮定する。

ここで，$p>q$ としても一般性を失わないので，l を自然数として，

$$p\log_2 3-q\log_2 3=l,\ \log_2 3=\frac{l}{p-q}\cdots\cdots\cdots②$$

これは，(1)の結論に反するので，$p\log_2 3$ と $q\log_2 3$ の小数部分は等しくない。

(3)　まず，$\log_2 8<\log_2 9$ より，$\log_2 2^3<\log_2 3^2$，$3<2\log_2 3$ となり，

$$1.5<\log_2 3\cdots\cdots\cdots③$$

また，$\log_2 243<\log_2 256$ より，$\log_2 3^5<\log_2 2^8$，$5\log_2 3<8$ となり，

$$\log_2 3<1.6\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$\log_2 3$ の値の小数第 1 位は 5 である。

［解　説］

(1)と(2)はつながっているものの，(3)は独立の設問です。2 の累乗を 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, …，3 の累乗を 3, 9, 27, 81, 243, …と書き並べて，評価式を考えました。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1) kを定数として，$f(x)=a\cos^2 x+2b\cos x\sin x+c\sin^2 x=k$ ……(＊)とおく。

まず，$x=0,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{4}$に対して，(＊)が成り立つことより，

$$a=k,\ c=k,\ \frac{1}{2}a+b+\frac{1}{2}c=k$$

すると，$a=c=k$，$b=0$となり，このとき任意のxで，明らかに(＊)は成り立つ。
よって，$f(x)$が定数となる条件は，$a=c$，$b=0$である。

(2) $g(x)=4\cos^2 x+2\cos x\sin x+\sin^2 x-\frac{5}{2}=4\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}+\sin 2x+\frac{1-\cos 2x}{2}-\frac{5}{2}$

$$=\sin 2x+\frac{3}{2}\cos 2x=\frac{\sqrt{13}}{2}\sin(2x+\alpha)$$

ただし，$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{13}}$，$\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{13}}$であり，これより$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{3}$となる。

さて，$-\frac{\pi}{4}\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}$から，$-\frac{\pi}{2}+\alpha\leqq 2x+\alpha\leqq\frac{\pi}{2}+\alpha$となり，$g(x)$は$2x+\alpha=\frac{\pi}{2}$のとき最大値をとる。すなわち，$2\theta+\alpha=\frac{\pi}{2}$であり，

$$\cos 2\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{13}},\ \sin 2\theta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{13}}$$

(3) $\int_0^\theta g(x)\,dx=\int_0^\theta\left(\sin 2x+\frac{3}{2}\cos 2x\right)dx=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{4}\sin 2x\right]_0^\theta$

$$=-\frac{1}{2}(\cos 2\theta-1)+\frac{3}{4}\sin 2\theta$$

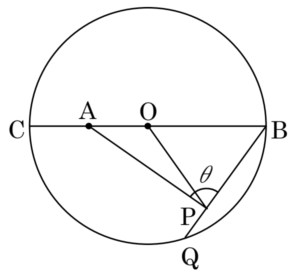
(2)の結果を用いると，$\int_0^\theta g(x)\,dx=-\frac{3}{2\sqrt{13}}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2\sqrt{13}}=\frac{1}{2}$

［解 説］

三角関数の理解を問う問題です。(1)とそれ以降の設問には，直接的な関連は見当たりません。

4

問題のページへ



(1)　線分 AB を$1:2$に内分する点が O，$1:4$に外分する点が C より，$\overrightarrow{PA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{PB}=\vec{b}$とおくと，

$$\overrightarrow{PO}=\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3},\ \overrightarrow{PC}=\frac{4\vec{a}-\vec{b}}{3}$$

また，$\overrightarrow{OB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{-2\vec{a}+2\vec{b}}{3}$

(2)　点 P は円 S の内部にあるので，$\angle BPC>90^\circ$ となり，

$$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\vec{b}\cdot\frac{4\vec{a}-\vec{b}}{3}<0,\ 4\vec{a}\cdot\vec{b}<|\vec{b}|^2$$

よって，$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}<\dfrac{|\vec{b}|^2}{4|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{|\vec{b}|}{4|\vec{a}|}$

(3)　$\overrightarrow{QP}=k\vec{b}$ $(k>0)$ とおくと，$\overrightarrow{QB}=(1+k)\vec{b}$，$\overrightarrow{QC}=k\vec{b}+\dfrac{4\vec{a}-\vec{b}}{3}=\dfrac{4\vec{a}+(3k-1)\vec{b}}{3}$

点 Q は円 S 上の点より，$\overrightarrow{QB}\cdot\overrightarrow{QC}=(1+k)\vec{b}\cdot\dfrac{4\vec{a}+(3k-1)\vec{b}}{3}=0$ となり，

$$4\vec{a}\cdot\vec{b}+(3k-1)|\vec{b}|^2=0,\ 4|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta+(3k-1)|\vec{b}|^2=0$$

よって，$3k|\vec{b}|=|\vec{b}|-4|\vec{a}|\cos\theta$ から，$PQ=k|\vec{b}|=\dfrac{|\vec{b}|-4|\vec{a}|\cos\theta}{3}$ となる。

(4)　$PA=3$，$PB=2$ から，(2)の結果を用いると，$PQ=\dfrac{2-12\cos\theta}{3}$ となり，

$$BQ=2+\frac{2-12\cos\theta}{3}=\frac{8-12\cos\theta}{3}=\frac{8-12\cos\theta}{3}\cdot\frac{BP}{2}=\frac{4-6\cos\theta}{3}BP$$

また，$BA=\frac{3}{2}BO$ から，$\triangle QAB=\dfrac{4-6\cos\theta}{3}\cdot\dfrac{3}{2}\triangle POB=(2-3\cos\theta)\triangle POB$

条件より，$\triangle QAB=3\triangle POB$ なので，$2-3\cos\theta=3$ となり，

$$\cos\theta=-\frac{1}{3},\ \sin\theta=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

以上より，$\triangle PAB=\dfrac{1}{2}PA\cdot PB\sin\theta=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot2\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=2\sqrt{2}$

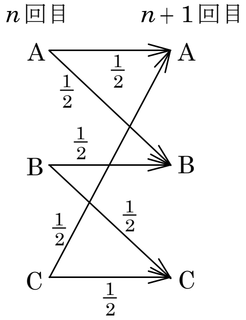
［解　説］

平面ベクトルの標準題です。計算量も適切なものです。

5

問題のページへ

(1)　最初，石は点 A にあるので，$a_1=\dfrac{1}{2}$，$b_1=\dfrac{1}{2}$，$c_1=0$



(2)　右の状態の遷移図より，

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}c_n=\frac{1}{2}(1-b_n)\cdots\cdots\cdots①$$

$$b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}b_n=\frac{1}{2}(1-c_n)\cdots\cdots\cdots②$$

$$c_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}c_n=\frac{1}{2}(1-a_n)\cdots\cdots\cdots③$$

①②③より，

$$a_2=\frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{2}\Big)=\frac{1}{4},\ b_2=\frac{1}{2}(1-0)=\frac{1}{2},\ c_2=\frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{2}\Big)=\frac{1}{4}$$

$$a_3=\frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{2}\Big)=\frac{1}{4},\ b_3=\frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{4}\Big)=\frac{3}{8},\ c_3=\frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{4}\Big)=\frac{3}{8}$$

(3)　(1)より，$a_1=b_1=\dfrac{1}{2}$ となり，a_1，b_1，c_1 のうち 2 つの値は一致する。

また，a_n，b_n，c_n のうち 2 つの値が一致するとき，a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1} のうち 2 つの値は，①②③より，明らかに一致する。

よって，帰納的に，a_n，b_n，c_n のうち 2 つの値は一致する。

(4)　a_n，b_n，c_n のうち一致する 2 つの値を p_n とするとき，$p_1=\dfrac{1}{2}$ で，

$$p_{n+1}=\frac{1}{2}(1-p_n),\ \ p_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\Big(p_n-\frac{1}{3}\Big)$$

これより，$p_n-\dfrac{1}{3}=\Big(p_1-\dfrac{1}{3}\Big)\Big(-\dfrac{1}{2}\Big)^{n-1}=\dfrac{1}{6}\Big(-\dfrac{1}{2}\Big)^{n-1}=-\dfrac{1}{3}\Big(-\dfrac{1}{2}\Big)^{n}$ となり，

$$p_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^n$$

［解　説］

確率と漸化式の融合についての典型題です。このタイプでは「全確率の和は 1」という当たり前のことを，いつも気にかけておく必要があります。