1

解答解説のページへ

$f(x)=\log_2(x-1)+\log_2(4-x)$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(x)$ の定義域を求めよ。

(2)　不等式 $f(x) \geqq 0$ を解け。

(3)　関数 $f(x)$ の最大値を m とするとき，2^{m-2} を求めよ。

(4)　(3)の m について，1000^m の整数部分の桁数を求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

2

解答解説のページへ

放物線 $C: y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$ 上に 2 点 A, B があり, A の x 座標は 3 である。点 A, 点 B における C の接線をそれぞれ l, m とし, l と m の交点を P とおくと, $\angle\mathrm{APB}=45^\circ$ であった。次の問いに答えよ。

(1) 接線 l の方程式を求めよ。

(2) 接線 m の傾きを求めよ。

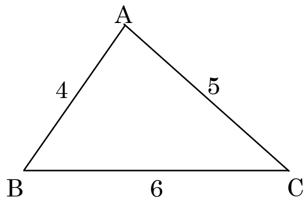
(3) 点 P の座標を求めよ。

(4) C, l, m で囲まれた図形において, 不等式 $x \geqq 0$ を満たす部分の面積 S を求めよ。

3

解答解説のページへ

図のような 3 辺の長さをもつ三角形 ABC がある。次の問いに答えよ。



(1)　$45^\circ < \angle\mathrm{B} < 60^\circ$ を証明せよ。

(2)　$\angle\mathrm{A} = 2\angle\mathrm{C}$ を証明せよ。

(3)　$40^\circ < \angle\mathrm{C} < 45^\circ$ を証明せよ。

4

解答解説のページへ

N は 4 以上の整数とする。次の規則にしたがって 1 個のさいころを繰り返し投げる。

規則：出た目を毎回記録し，偶数の目が 3 回出るか，あるいは奇数の目が N 回出たところで，さいころを投げる操作を終了する。

ただし，さいころの目の出方は同様に確からしいとする。次の問いに答えよ。

(1)　さいころを投げる回数は，最大で何回か。

(2)　さいころを 3 回投げて操作を終了する確率を求めよ。

(3)　さいころを N 回投げて操作を終了する確率を求めよ。

(4)　最後に奇数の目が出て操作を終了する確率を求めよ。

(5)　$N=4$ のとき，さいころを投げる回数の期待値を求めよ。

5

解答解説のページへ

n は 3 以上の整数とする。1 から n までの整数から連続する 2 つの整数 x, $x+1$ を取り除く。次の問いに答えよ。

(1)　$n=17$ のとき，残された整数の総和を個数 15 で割った値が $\dfrac{42}{5}$ であるとする。取り除いた 2 つの整数を求めよ。

(2)　$n \geqq 39$ のとき，不等式

$$\frac{1}{2}n(n+1)-1-2(n-1)>\frac{205}{11}(n-2)$$

が成り立つことを証明せよ。

(3)　残された整数の総和を個数 $n-2$ で割った値が $\dfrac{205}{11}$ であるとする。n と取り除いた 2 つの整数を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$f(x)=\log_2(x-1)+\log_2(4-x)$ に対して，定義域は，$x-1>0$ かつ $4-x>0$ より，$1<x<4$ である。

(2)　$f(x)\geqq 0$ の解は，$\log_2(x-1)(4-x)\geqq 0$ より，$(x-1)(4-x)\geqq 1$ となり，

$$x^2-5x+5\leqq 0,\ \frac{5-\sqrt{5}}{2}\leqq x\leqq\frac{5+\sqrt{5}}{2}\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

なお, $(*)$は $1<x<4$ を満たしている。

(3)　$f(x)=\log_2(x-1)(4-x)=\log_2(-x^2+5x-4)=\log_2\left\{-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\right\}$

これより，$f(x)$ の最大値 m は，$m=\log_2\frac{9}{4}$ となり，

$$2^{m-2}=\frac{1}{4}\cdot 2^m=\frac{1}{4}\cdot 2^{\log_2\frac{9}{4}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{4}=\frac{9}{16}$$

(4)　まず，$a=1000^m$ とおくと，

$$\log_{10}a=m\log_{10}1000=3m=3\log_2\frac{9}{4}=6\log_2\frac{3}{2}=6(\log_2 3-1)$$

ここで，$\log_2 3=\frac{0.4771}{0.3010}\fallingdotseq 1.585$ より，$\log_{10}a\fallingdotseq 3.51$ となり, $3<\log_{10}a<4$

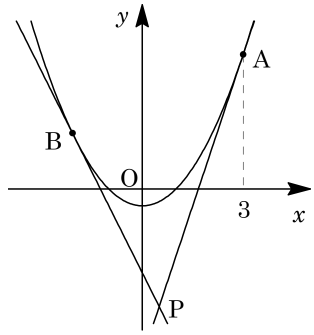
よって，$a=1000^m$ の整数部分は 4 桁である。

［解 説］

指数・対数についての基本問題です。ただ, (4)の数値計算には閉口しましたが。

2

問題のページへ



(1)　$C: y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$ に対して，$y'=x$ より，点 $\mathrm{A}(3,\ 4)$ における接線 l の方程式は,

$$y-4=3(x-3),\ \ y=3x-5\ \cdots\cdots\cdots①$$

(2)　接線 l, m と x 軸の正の向きとのなす角をそれぞれ α, β とすると，①より，$\tan\alpha=3$ である。

条件より，$\beta=\alpha+45°$ なので,

$$\tan\beta=\tan(\alpha+45°)=\frac{3+1}{1-3\times1}=-2$$

よって，接線 m の傾きは -2 である。

(3)　点 B の x 座標は，$y'=x$ と接線 m の傾きが -2 から，$x=-2$ である。すると，$\mathrm{B}\left(-2,\ \frac{3}{2}\right)$ から，接線 m の方程式は,

$$y-\frac{3}{2}=-2(x+2),\ \ y=-2x-\frac{5}{2}\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②を連立すると，$3x-5=-2x-\frac{5}{2}$ より，$x=\frac{1}{2}$ となり，$y=-\frac{7}{2}$

よって, l と m の交点は，$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ -\frac{7}{2}\right)$ である。

(4)　C, l, m で囲まれた図形の $x\geqq0$ を満たす部分の面積 S は,

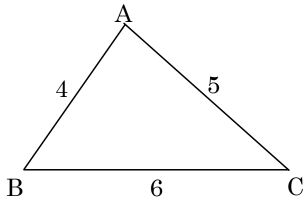
$$S=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}+2x+\frac{5}{2}\right)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{3}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}-3x+5\right)dx$$
$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}x^2+2x+2\right)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{3}\frac{1}{2}(x-3)^2dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{6}+x^2+2x\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{1}{6}(x-3)^3\right]_{\frac{1}{2}}^{3}$$
$$=\frac{1}{48}+\frac{1}{4}+1+\frac{1}{6}\cdot\frac{125}{8}=\frac{31}{8}$$

［解　説］

微積分の基本問題です。なお, (2)については, 位置関係を図形的に決めています。

$\boxed{3}$

問題のページへ



(1)　余弦定理より，$\cos\angle\mathrm{B}=\dfrac{16+36-25}{2\cdot4\cdot6}=\dfrac{9}{16}$

ここで，$8<9<8\sqrt{2}$ より，$\dfrac{1}{2}<\dfrac{9}{16}<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ となり，

$$\cos60^\circ<\cos\angle\mathrm{B}<\cos45^\circ$$

よって，$45^\circ<\angle\mathrm{B}<60^\circ$ である。

(2)　(1)と同様に，$\cos\angle\mathrm{A}=\dfrac{16+25-36}{2\cdot4\cdot5}=\dfrac{1}{8}$，$\cos\angle\mathrm{C}=\dfrac{25+36-16}{2\cdot5\cdot6}=\dfrac{3}{4}$ となり，

$$\cos2\angle\mathrm{C}=2\cos^2\angle\mathrm{C}-1=2\cdot\frac{9}{16}-1=\frac{1}{8}$$

すると，$\cos\angle\mathrm{A}=\cos2\angle\mathrm{C}$ となり，$0^\circ<\angle\mathrm{C}<90^\circ$ から，$\angle\mathrm{A}=2\angle\mathrm{C}$ となる。

(3)　(2)より，$\angle\mathrm{B}+3\angle\mathrm{C}=180^\circ$ となり，$\angle\mathrm{C}=\dfrac{180^\circ-\angle\mathrm{B}}{3}$

(1)より，$45^\circ<\angle\mathrm{B}<60^\circ$ なので，$40^\circ<\angle\mathrm{C}<45^\circ$ となる。

［解　説］

三角比と三角関数についてのおだやかな基本問題です。

4

問題のページへ

(1)　$N \geqq 4$ より，さいころを投げる回数が最大となるのは，偶数 2 回，奇数 $N-1$ 回出た後，もう 1 回投げる場合より，$2+(N-1)+1=N+2$ 回である。

(2)　さいころを 3 回投げて操作を終了する場合は，偶数が 3 回出たときより，その確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$ である。

(3)　さいころを N 回投げて操作を終了する場合は，奇数が N 回出たか，$N-1$ 回目までに偶数 2 回奇数 $N-3$ 回出て N 回目に偶数が出たときより，その確率は,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^N+{}_{N-1}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^{N-3}\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\left\{1+\frac{(N-1)(N-2)}{2}\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^N$$

$$=(N^2-3N+4)\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}$$

(4)　最後に奇数の目が出て操作を終了する場合は,

(i)　奇数が N 回出たとき

(ii)　N 回目までに偶数 1 回奇数 $N-1$ 回出て，$N+1$ 回目に奇数が出たとき

(iii)　$N+1$ 回目までに偶数 2 回奇数 $N-1$ 回出て，$N+2$ 回目に奇数が出たとき

(i)～(iii)より，その確率は,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^N+{}_N\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+{}_{N+1}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\left\{1+\frac{N}{2}+\frac{(N+1)N}{8}\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^N=(N^2+5N+8)\left(\frac{1}{2}\right)^{N+3}$$

(5)　$N=4$ のとき, (1)より，さいころを投げる回数は最大 6 回となる。

(i)　3 回投げて操作を終了する場合　その確率は, (2)より $\frac{1}{8}$

(ii)　4 回投げて操作を終了する場合　その確率は, (3)より $(16-12+4)\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{4}$

(iii)　5 回投げて操作を終了する場合

4 回目までに偶数 1 回奇数 3 回出て 5 回目に奇数が出たか，4 回目までに偶数 2 回奇数 2 回出て 5 回目に偶数が出たときより，その確率は,

$${}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^3\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{16}$$

(iv)　6 回投げて操作を終了する場合　その確率は, (1)より，${}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 1=\frac{5}{16}$

(i)～(iv)より，さいころを投げる回数の期待値は,

$$3\times\frac{1}{8}+4\times\frac{1}{4}+5\times\frac{5}{16}+6\times\frac{5}{16}=\frac{77}{16}$$

［解　説］

題意を数式化するのときに細心の注意が要求される確率の問題です。

5　　問題のページへ

(1)　まず, 1 から 17 までの整数の和は，$1+2+\cdots+17=\frac{1}{2}\cdot 17\cdot 18=153$

また, 残された整数の総和は，条件より，$15\times\frac{42}{5}=126$

すると，$x+(x+1)=153-126$ から，$x=13$ となるので, 取り除いた 2 つの整数は 13 と 14 である。

(2)　$\frac{1}{2}n(n+1)-1-2(n-1)=\frac{1}{2}(n^2-3n+2)=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ となり，$n\geqq 39$ で，

$$\frac{1}{2}(n-1)-\frac{205}{11}\geqq\frac{1}{2}\cdot 38-\frac{205}{11}=\frac{4}{11}>0$$

すると，$\frac{1}{2}(n-1)>\frac{205}{11}$ より，$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)>\frac{205}{11}(n-2)$ となり，

$$\frac{1}{2}n(n+1)-1-2(n-1)>\frac{205}{11}(n-2)\cdots\cdots\cdots①$$

(3)　まず, 1 から n までの整数の和は，$1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

また, 残された整数の総和は，条件より，$\frac{205}{11}(n-2)$

すると，$x+(x+1)=\frac{1}{2}n(n+1)-\frac{205}{11}(n-2)\cdots\cdots\cdots②$

ここで，$n\geqq 39$ とすると, ①から,

$$2x+1>1+2(n-1)=2n-1\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$1\leqq x\leqq n-1$ から $3\leqq 2x+1\leqq 2n-1$ となり, ③は成立しない。

よって，$3\leqq n\leqq 38$ である。

さて，$\frac{205}{11}(n-2)$ は整数なので，$n-2$ は 11 の倍数となり，$n-2=11,\ 22,\ 33$ から，$n=13,\ 24,\ 35$ である。

(i)　$n=13$ のとき　②から，$2x+1=91-205=-114$ より不適。

(ii)　$n=24$ のとき　②から，$2x+1=300-410=-110$ より不適。

(iii)　$n=35$ のとき　②から，$2x+1=630-615=15$ より，$x=7$

(i)～(iii)より，$n=35$ となり, 取り除いた 2 つの整数は 7 と 8 である。

［解 説］

整数と数列の融合問題です。(2)のいわくありげな不等式が, (3)への強力な誘導となっています。