1　　解答解説のページへ

行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換によって，2 点 P$(1,\ 1)$，Q$(2,\ 2)$ は連立不等式 $1\leqq x\leqq 2$，$1\leqq y\leqq 2$ の表す領域内の点 P$'$，Q$'$ にそれぞれ移されるものとする。ただし，$a,\ b,\ c,\ d$ は正の実数で $a>c$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1)　$a+b=1$ および $c+d=1$ が成り立つことを証明せよ。

(2)　4 点 O$(0,\ 0)$，R$(a,\ c)$，S$(a+b,\ c+d)$，T$(b,\ d)$ を頂点とする平行四辺形 ORST の面積を p とするとき，次の式が成り立つことを証明せよ。

$$A\begin{pmatrix} b \\ -c \end{pmatrix}=p\begin{pmatrix} b \\ -c \end{pmatrix}$$

(3)　自然数 n に対して，a_n，b_n，c_n，d_n を

$$\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} 1 & b \\ 1 & -c \end{pmatrix}$$

で定める。このとき a_n，b_n，c_n，d_n を $b,\ c,\ n$ および(2)の p を用いて表せ。

(4)　$A^3=\dfrac{1}{27}\begin{pmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}$ となるように A を定めよ。

2

解答解説のページへ

a を実数とし，$f(x)=x^3-3x^2+3x$ とおく。数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1=a,\ \ x_{n+1}=f(x_n)\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。次の問いに答えよ。

(1) すべての自然数 n について $x_n=a$ となるとき，a を求めよ。

(2) $a<1$ のとき，$x_n<1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを証明せよ。

(3) $0<a<1$ のとき，$x_n<x_{n+1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを証明せよ。

3

解答解説のページへ

関数 $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$ について，次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底である。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ の値を求めよ。

(2) 関数 $y=f(x)$ の増減，グラフの凹凸および変曲点を調べ，グラフの概形をかけ。

(3) $\alpha=\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ とおく。正の実数 t に対して，曲線 $y=f(x)$，3 直線 $x=t$，$x=0$ および $y=\alpha$ で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めよ。

(4) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} S(t)$ の値を求めよ。

4

解答解説のページへ

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。原点 O を中心とする単位円周上の異なる 3 点 A, B, C が条件

$$(\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(\sin\theta)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$$

を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1) 2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は垂直であることを証明せよ。

(2) $\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right|$, $\left|\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right|$ を θ を用いて表せ。

(3) 三角形 ABC の周の長さ AB＋BC＋CA を最大にする θ を求めよ。

5

解答解説のページへ

n は自然数とし，点 P は次の規則にしたがって座標平面上を動くとする。

規則：

(A)　P は，はじめに点 $(1,\ 2)$ にある。

(B)　さいころを投げて 2 以下の目が出れば P は原点を中心に反時計回りに $120°$ 回転し, 3 以上の目が出れば時計回りに $60°$ 回転する。

(C)　(B)を n 回繰り返す。

ただし，さいころの目の出方は同様に確からしいとする。次の問いに答えよ。

(1)　$n=3$ のとき，出た目が 4, 1, 2 であったとする。このとき P が最後に移った点の座標を求めよ。

(2)　$n=3$ のとき，P が点 $(1,\ 2)$ にある確率を求めよ。

(3)　$n=6$ のとき，P が点 $(-1,\ -2)$ にある確率を求めよ。

(4)　$n=3m$ のとき，P が点 $(1,\ 2)$ にある確率を求めよ。ただし，m は自然数とする。

1

問題のページへ

(1) $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b\\c+d\end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a+2b\\2c+2d\end{pmatrix}$から，条件より，

$1\leqq a+b\leqq 2\cdots\cdots\cdots①$，$1\leqq c+d\leqq 2\cdots\cdots\cdots②$

$1\leqq 2a+2b\leqq 2\cdots\cdots\cdots③$，$1\leqq 2c+2d\leqq 2\cdots\cdots\cdots④$

③より，$\dfrac{1}{2}\leqq a+b\leqq 1$となり，①と合わせて，$a+b=1$

④より，$\dfrac{1}{2}\leqq c+d\leqq 1$となり，②と合わせて，$c+d=1$

(2) (1)より，$A=\begin{pmatrix}1-b&b\\c&1-c\end{pmatrix}$となり，$a>c$から$b+c<1$である。

さて，平行四辺形 ORST の面積が p より，

$$p=|ad-bc|=|(1-b)(1-c)-bc|=|1-b-c|=1-b-c$$

よって，$A\begin{pmatrix}b\\-c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-b&b\\c&1-c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\-c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b(1-b-c)\\-c(-b+1-c)\end{pmatrix}=p\begin{pmatrix}b\\-c\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots⑤$

(3) (1)より，$A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$となり，$A^n\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots⑥$

⑤より，$A\begin{pmatrix}b\\-c\end{pmatrix}=p\begin{pmatrix}b\\-c\end{pmatrix}$から，$A^n\begin{pmatrix}b\\-c\end{pmatrix}=p^n\begin{pmatrix}b\\-c\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots⑦$

⑥⑦から，$A^n\begin{pmatrix}1&b\\1&-c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&bp^n\\1&-cp^n\end{pmatrix}$となるので，

$a_n=1$，$b_n=bp^n$，$c_n=1$，$d_n=-cp^n$

(4) (3)より，$A^3\begin{pmatrix}1&b\\1&-c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&bp^3\\1&-cp^3\end{pmatrix}$となり，条件$A^3=\dfrac{1}{27}\begin{pmatrix}14&13\\13&14\end{pmatrix}$と合わせて，

$$\frac{1}{27}\begin{pmatrix}14&13\\13&14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&b\\1&-c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&bp^3\\1&-cp^3\end{pmatrix}$$

すると，$14b-13c=27bp^3\cdots\cdots\cdots⑧$，$13b-14c=-27cp^3\cdots\cdots\cdots⑨$

⑧⑨より，$b+c=27p^3(b+c)$となり，$b+c>0$から，$27p^3=1$

よって，$p=1-b-c=\dfrac{1}{3}$となり，$b+c=\dfrac{2}{3}\cdots\cdots\cdots⑩$

⑧より，$14b-13c=b$から$b=c$となり，⑩より$b=c=\dfrac{1}{3}$

さらに，(1)から，$a=d=\dfrac{2}{3}$となり，$A=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$である。

［解 説］

⑥式と⑦式をベースとした行列の n 乗の典型的な問題です。

$\boxed{2}$ 問題のページへ

(1)　条件は，$x_n = x_{n+1} = a$ と同値なので，$a^3 - 3a^2 + 3a = a$

$$a^3 - 3a^2 + 2a = 0,\ a(a-1)(a-2) = 0$$

よって，$a = 0,\ 1,\ 2$

(2)　$a < 1$ のとき，$x_n < 1$ であることを数学的帰納法で証明する。

(i)　$n = 1$ のとき　$x_1 = a < 1$ より成り立つ。

(ii)　$n = k$ のとき　$x_k < 1$ と仮定する。

$$x_{k+1} - 1 = x_k^{\ 3} - 3x_k^{\ 2} + 3x_k - 1 = (x_k - 1)^3 < 0$$

よって，$x_{k+1} < 1$ が成り立つ。

(i)(ii)より，$a < 1$ のとき，すべての自然数 n について $x_n < 1$ である。

(3)　まず，$0 < a < 1$ のとき，$x_n > 0$ であることを数学的帰納法で証明する。

(i)　$n = 1$ のとき　$x_1 = a > 0$ より成り立つ。

(ii)　$n = k$ のとき　$x_k > 0$ と仮定する。

$$x_{k+1} = x_k^{\ 3} - 3x_k^{\ 2} + 3x_k = x_k\left\{\left(x_k - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right\} > 0$$

よって，$x_{k+1} > 0$ が成り立つ。

(i)(ii)より，$0 < a < 1$ のとき，すべての自然数 n について $x_n > 0$ である。

すると，(2)と合わせて，$0 < x_n < 1$ となり，

$$x_{n+1} - x_n = x_n^{\ 3} - 3x_n^{\ 2} + 2x_n = x_n(x_n - 1)(x_n - 2) > 0$$

よって，すべての自然数 n について $x_n < x_{n+1}$ が成り立つ。

［解　説］

上の解答例では省いていますが，解き始める前に，$y = f(x)$ と $y = x$ のグラフをかいて，(1)～(3)の結論を図でチェックしています。

3

問題のページへ

(1)　$f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$ に対して，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1+e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{-x}+1}=1$ ………(∗)

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{1+e^x}=0$$

(2)　$f'(x)=\dfrac{e^x(1+e^x)-e^x\cdot e^x}{(1+e^x)^2}=\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$

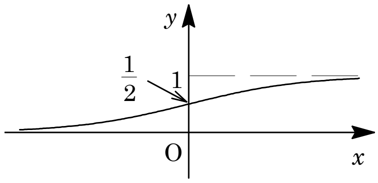
$$f''(x)=\frac{e^x(1+e^x)^2-e^x\cdot 2(1+e^x)e^x}{(1+e^x)^4}$$

$$=\frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	$\frac{1}{2}$	↗

すると，$y=f(x)$の増減，グラフの凹凸は右表のようになり，変曲点の座標は$\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$である。

また，グラフの概形は右図のようになる。



(3)　曲線$y=f(x)$，3 直線$x=t$，$x=0$および$y=1$で囲まれた図形の面積$S(t)$は，

$$S(t)=1\times t-\int_0^t\frac{e^x}{1+e^x}dx=t-\Big[\log(1+e^x)\Big]_0^t=t-\log(1+e^t)+\log 2$$

(4)　(3)に(∗)を適用すると，

$$\lim_{t\to\infty}S(t)=\lim_{t\to\infty}\left\{\log e^t-\log(1+e^t)+\log 2\right\}=\lim_{t\to\infty}\log f(t)+\log 2=\log 2$$

［解　説］

グラフの概形を描く典型題です。計算も簡単です。

4

問題のページへ

(1) $(\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(\sin\theta)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-(\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{OA}}-(\sin\theta)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=\cos^2\theta|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+2\cos\theta\sin\theta\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\sin^2\theta|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$$

ここで，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$ から，$\cos\theta\sin\theta\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より $\cos\theta\sin\theta>0$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ から $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は垂直である。

(2) まず，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(\cos\theta+1)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(\sin\theta)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ から，

$$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2=(\cos\theta+1)^2+\sin^2\theta=2+2\cos\theta,\ |\overrightarrow{\mathrm{CA}}|=\sqrt{2+2\cos\theta}$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(\sin\theta+1)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ から，

$$|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|^2=\cos^2\theta+(\sin\theta+1)^2=2+2\sin\theta,\ |\overrightarrow{\mathrm{CB}}|=\sqrt{2+2\sin\theta}$$

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=1$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{2}$ となり，

$$\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA}=\sqrt{2}+\sqrt{2+2\sin\theta}+\sqrt{2+2\cos\theta}$$

$f(\theta)=\sqrt{1+\sin\theta}+\sqrt{1+\cos\theta}$ とおくと，$\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA}=\sqrt{2}\{1+f(\theta)\}$

$$f'(\theta)=\frac{\cos\theta}{2\sqrt{1+\sin\theta}}-\frac{\sin\theta}{2\sqrt{1+\cos\theta}}=\frac{\cos\theta\sqrt{1+\cos\theta}-\sin\theta\sqrt{1+\sin\theta}}{2\sqrt{1+\sin\theta}\sqrt{1+\cos\theta}}$$

$$=\frac{\cos^2\theta(1+\cos\theta)-\sin^2\theta(1+\sin\theta)}{2\sqrt{1+\sin\theta}\sqrt{1+\cos\theta}\left\{\cos\theta\sqrt{1+\cos\theta}+\sin\theta\sqrt{1+\sin\theta}\right\}}$$

さらに，$g(\theta)=\cos^2\theta(1+\cos\theta)-\sin^2\theta(1+\sin\theta)$ とおくと，

$$g(\theta)=\cos^3\theta+\cos^2\theta-\sin^3\theta-\sin^2\theta$$
$$=(\cos\theta-\sin\theta)(1+\cos\theta\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta)$$

すると，$g(\theta)$ と $f'(\theta)$ の符号は一致するので，$f(\theta)$ の増減は右表のようになる。

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		$\nearrow$		$\searrow$	

したがって，$\theta=\frac{\pi}{4}$ のとき $f(\theta)$ は最大となる。すなわち，$\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA}$ は，$\theta=\frac{\pi}{4}$ のとき最大である。

［解　説］

(3)の計算は，半角の公式を利用した方が簡単だろうと思いつつ，そのまま微分して増減を調べました。

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1)　点 P が原点を中心に120°回転する確率は$\dfrac{1}{3}$，-60°回転する確率は$\dfrac{2}{3}$である。

さて，出た目が 4，1，2 であったとき，点$\mathrm{P}(1,\ 2)$は$-60^\circ+120^\circ+120^\circ=180^\circ$回転することより，点$(-1,\ -2)$に移る。

(2)　$n=3$のとき，点 P が点$(1,\ 2)$に移るのは，120°回転が 3 回か，または120°回転が 1 回で-60°回転が 2 回の場合より，その確率は，

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3+{}_3\mathrm{C}_1\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{27}+\frac{12}{27}=\frac{13}{27}$$

(3)　(2)と同様に考えると，$n=3$のとき，点 P が点$(-1,\ -2)$に移る確率は，

$${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{6}{27}+\frac{8}{27}=\frac{14}{27}$$

すると，$n=3$のとき，点 P は点$(1,\ 2)$または点$(-1,\ -2)$に移っている。

これより，$n=6$のとき，点 P が点$(-1,\ -2)$にある確率は，

$${}_2\mathrm{C}_1\frac{13}{27}\cdot\frac{14}{27}=\frac{364}{729}$$

(4)　$n=3m$のとき，点 P が点$(1,\ 2)$にある確率をp_mとすると，$p_0=1$で，

$$p_{m+1}=\frac{13}{27}p_m+\frac{14}{27}(1-p_m)=-\frac{1}{27}p_m+\frac{14}{27}$$

この式を変形すると，$p_{m+1}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{27}\left(p_m-\dfrac{1}{2}\right)$となり，

$$p_m-\frac{1}{2}=\left(p_0-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{27}\right)^m=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{27}\right)^m,\quad p_m=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{27}\right)^m$$

［解 説］

最初，(1)の誘導に気付かず，(3)を120°回転が x 回，-60°回転が y 回として計算しましたが，(4)の設問を見るとあまりにも面倒そうだったので，方針を転換しました。その結果が上の解答例です。