1　解答解説のページへ

放物線 $y=2x^2-8$ を C とする。x 軸上の点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ $(a>0)$ を通り C と接する直線が 2 本あるとき，次の問いに答えよ。

(1) a の値の範囲を求めよ。

(2) 2 つの接点 P，Q の x 座標をそれぞれ α，β $(\alpha<\beta)$ とする。$\beta-\alpha=3$ のとき，a の値と 2 本の接線の方程式を求めよ。

(3) (2)で求めた 2 本の接線と C で囲まれた部分の面積を求めよ。

2

解答解説のページへ

座標平面上に点 $A(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $(0<\theta<\pi)$ がある。原点を O とし，x 軸に関して点 A と対称な点を B とする。次の問いに答えよ。

(1) $-1<\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\leqq\dfrac{1}{2}$ となる θ の範囲を求めよ。

(2) 点 P を，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で定める。点 P から x 軸に下ろした垂線を PQ とする。θ が(1)で求めた範囲を動くとき，$\triangle\mathrm{POQ}$ の面積の最大値を求めよ。

3

解答解説のページへ

関数 $f(x)=\log_2(x+1)$ に対して，次の問いに答えよ。

(1)　0 以上の整数 k に対して，$f(x)=\dfrac{k}{2}\{f(1)-f(0)\}$ を満たす x を k を用いて表せ。

(2)　(1)で求めた x を x_k とおく。$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(x_k-x_{k-1})$ を n を用いて表せ。

4

解答解説のページへ

座標平面上で, 原点 O を中心とする半径 1 の円を C とし, 2 点 P$(0,\ 1)$, Q$(s,\ 0)$ を考える。2 点 P, Q を通る直線を l とし, l と C の交点のうち P ではないものを R とする。次の問いに答えよ。

(1) 点 R の座標を s を用いて表せ。

(2) x 座標と y 座標がともに有理数である点を有理点という。s が有理数のとき, R は有理点であることを示せ。

$\boxed{5}$ 解答解説のページへ

座標平面上の点で，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。n を 3 以上の自然数とし，連立不等式

$$x \geqq 0,\ \ y \geqq 0,\ \ x+y \leqq n$$

の表す領域を D とする。格子点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ に対して，領域 D 内の格子点 $\mathrm{B}(c,\ d)$ が $|a-c|+|b-d|=1$ を満たすとき，点 B を点 A の隣接点という。次の問いに答えよ。

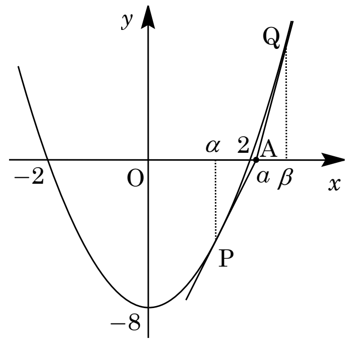
(1) 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ の隣接点をすべて求めよ。また，領域 D 内の格子点 P が直線 $x+y=n$ 上にあるとき，P の隣接点の個数を求めよ。

(2) 領域 D 内の格子点のうち隣接点の個数が 4 であるものの個数を求めよ。

(3) 領域 D から格子点を 1 つ選ぶとき，隣接点の個数の期待値が 3 以上となるような n の範囲を求めよ。ただし，格子点の選ばれ方は同様に確からしいものとする。

1

問題のページへ



(1)　$C: y=2x^2-8$ に対して，$y'=4x$

C 上の接点を $(t,\ 2t^2-8)$ とすると，接線は，

$y-(2t^2-8)=4t(x-t)$

$y=4tx-2t^2-8$ ………①

①が $\mathrm{A}(a,\ 0)$ を通ることより，

$0=4ta-2t^2-8$，$t^2-2at+4=0$ ………②

接線が 2 本より，②は異なる 2 つの実数解をもち，

$D/4=a^2-4>0$

すると，$a>0$ から $a>2$ である。

(2)　②の解を $t=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とすると，$\alpha=a-\sqrt{a^2-4}$，$\beta=a+\sqrt{a^2-4}$

ここで，$\beta-\alpha=3$ より，$2\sqrt{a^2-4}=3$ となり，

$a^2-4=\dfrac{9}{4}$，$a^2=\dfrac{25}{4}$

$a>0$ から $a=\dfrac{5}{2}$ であり，このとき，$\alpha=\dfrac{5}{2}-\dfrac{3}{2}=1$，$\beta=\dfrac{5}{2}+\dfrac{3}{2}=4$ となる。

よって，①より，2 本の接線の方程式は，

$y=4x-10$，$y=16x-40$

(3)　2 本の接線と C で囲まれた部分の面積を S とすると，

$$S=\int_1^{\frac{5}{2}}(2x^2-8-4x+10)\,dx+\int_{\frac{5}{2}}^{4}(2x^2-8-16x+40)\,dx$$

$$=2\int_1^{\frac{5}{2}}(x-1)^2\,dx+2\int_{\frac{5}{2}}^{4}(x-4)^2\,dx=\frac{2}{3}\Big[\,(x-1)^3\,\Big]_1^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}\Big[\,(x-4)^3\,\Big]_{\frac{5}{2}}^{4}$$

$$=\frac{2}{3}\Big(\frac{3}{2}\Big)^3+\frac{2}{3}\Big(\frac{3}{2}\Big)^3=\frac{9}{2}$$

［解　説］

放物線の接線と面積についての超有名題です。

2　問題のページへ

(1)　$0<\theta<\pi$ のとき，$\mathrm{A}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{B}(\cos\theta,\ -\sin\theta)$ に対し，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos 2\theta$$

$-1<\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\leqq\dfrac{1}{2}$ から $-1<\cos 2\theta\leqq\dfrac{1}{2}$ となり，$\dfrac{\pi}{3}\leqq 2\theta<\pi$，$\pi<2\theta\leqq\dfrac{5}{3}\pi$ より，

$$\frac{\pi}{6}\leqq\theta<\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}<\theta\leqq\frac{5}{6}\pi$$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2(\cos\theta,\ \sin\theta)+\dfrac{1}{2}(\cos\theta,\ -\sin\theta)=\left(\dfrac{5}{2}\cos\theta,\ \dfrac{3}{2}\sin\theta\right)$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(\dfrac{5}{2}\cos\theta,\ 0\right)$ となるので，$\triangle\mathrm{POQ}$ の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{OQ}\cdot\mathrm{PQ}=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}|\cos\theta|\cdot\frac{3}{2}|\sin\theta|=\frac{15}{8}|\cos\theta\sin\theta|=\frac{15}{16}|\sin 2\theta|$$

これより，$\sin 2\theta=\pm1\ \left(\theta=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi\right)$ のとき，S は最大値 $\dfrac{15}{16}$ をとる。

［解　説］

平面ベクトルの成分計算について，基本の確認問題です。

3

問題のページへ

(1)　$f(x)=\log_2(x+1)$ に対して，$f(1)-f(0)=\log_2 2-\log_2 1=1$

条件より，$f(x)=\dfrac{k}{2}\{f(1)-f(0)\}$ なので，$\log_2(x+1)=\dfrac{k}{2}$ から，

$$x=2^{\frac{k}{2}}-1$$

(2)　$x_k=2^{\frac{k}{2}}-1$ であるので，

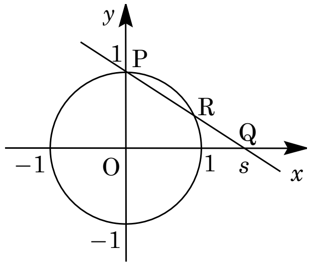
$$S_n=\sum_{k=1}^{n}k(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}\{kx_k-(k-1)x_{k-1}-x_{k-1}\}$$
$$=nx_n-0-\sum_{k=1}^{n}x_{k-1}=n\left(2^{\frac{n}{2}}-1\right)-\sum_{k=1}^{n}\left(2^{\frac{k-1}{2}}-1\right)$$
$$=n\left(2^{\frac{n}{2}}-1\right)-\frac{(\sqrt{2})^n-1}{\sqrt{2}-1}+n=n(\sqrt{2})^n-\{(\sqrt{2})^n-1\}(\sqrt{2}+1)$$
$$=(n-\sqrt{2}-1)(\sqrt{2})^n+\sqrt{2}+1$$

［解 説］

数列の基本的な問題です。(2)では，階差数列を利用して計算量を減らしています。そのまま計算しても構いませんが……。

4

問題のページへ



(1) 2 点 $\mathrm{P}(0,\ 1)$，$\mathrm{Q}(s,\ 0)$ に対し，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(s,\ -1)$

すると, 2 点 P, Q を通る直線 l の法線ベクトルの成分を $(1,\ s)$ とおくことができ, l の方程式は,

$$x+s(y-1)=0\,,\ \ x=-s(y-1)\cdots\cdots\cdots①$$

また, $C: x^2+y^2=1$ ……②から, ①②を連立して,

$$s^2(y-1)^2+y^2-1=0$$

$$(y-1)(s^2y-s^2+y+1)=0$$

$y\neq 1$ のとき $(s^2+1)y=s^2-1$ となり， $y=\dfrac{s^2-1}{s^2+1}$， $x=-s\left(\dfrac{s^2-1}{s^2+1}-1\right)=\dfrac{2s}{s^2+1}$

よって，$\mathrm{R}\left(\dfrac{2s}{s^2+1},\ \dfrac{s^2-1}{s^2+1}\right)$である。

(2) s が有理数のとき, p, q を整数とし $s=\dfrac{q}{p}$ $(p\neq 0)$ とおく。このとき, (1)より,

$$x=\frac{2s}{s^2+1}=\frac{2\cdot\dfrac{q}{p}}{\left(\dfrac{q}{p}\right)^2+1}=\frac{2pq}{p^2+q^2}\,,\ \ y=\frac{s^2-1}{s^2+1}=\frac{\left(\dfrac{q}{p}\right)^2-1}{\left(\dfrac{q}{p}\right)^2+1}=\frac{q^2-p^2}{p^2+q^2}$$

よって，点 R は有理点である。

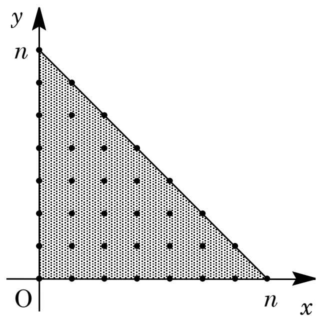
［解　説］

円と直線についての計算問題です。なお, (2)については, 出題の意図が理解できません。

5

問題のページへ

(1)　まず，連立不等式$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x+y \leqq n$で表される領域Dは，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まれる。



さて，a, b, c, dが整数で，$|a-c|+|b-d|=1$のとき，

$$(a-c,\ b-d)=(\pm 1,\ 0),\ (0,\ \pm 1)$$

これより，格子点$\mathrm{A}(a,\ b)$に対して，その隣接点$\mathrm{B}(c,\ d)$は，領域D内にあり，

$$(c,\ d)=(a-1,\ b),\ (a+1,\ b),\ (a,\ b-1),\ (a,\ b+1)$$

すると，点$\mathrm{O}(0,\ 0)$の隣接点は，点$(1,\ 0)$と点$(0,\ 1)$である。

また，領域D内の格子点Pが直線$x+y=n$上にあるとき，隣接点については，

(i)　$\mathrm{P}(n,\ 0)$のとき

隣接点は，点$(n-1,\ 0)$となり，個数は1である。

(ii)　$\mathrm{P}(0,\ n)$のとき

隣接点は，点$(0,\ n-1)$となり，個数は1である。

(iii)　$\mathrm{P}(k,\ n-k)$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$のとき

隣接点は，点$(k-1,\ n-k)$および点$(k,\ n-k-1)$となり，個数は2である。

(2)　領域D内の格子点のうち隣接点の個数が4であるものは，連立不等式$x \geqq 1$，$y \geqq 1$，$x+y \leqq n-1$で表される領域内の格子点である。その個数は，

$$1+2+\cdots+(n-2)=\frac{1}{2}(n-2)(n-1)$$

(3)　領域D内の格子点の総数Nは，$N=1+2+\cdots+(n+1)=\dfrac{1}{2}(n+1)(n+2)$

(i)　隣接点の個数が1のとき

(1)の(i)(ii)より2通りの場合があり，その確率は$\dfrac{2}{N}$となる。

(ii)　隣接点の個数が2のとき

点$\mathrm{O}(0,\ 0)$および(1)の(iii)より，$1+(n-1)=n$通りの場合があり，その確率は$\dfrac{n}{N}$となる。

(iii)　隣接点の個数が3のとき

格子点が$\mathrm{P}(k,\ 0)$，$\mathrm{P}(0,\ k)$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$で，$2(n-1)$通りの場合があり，その確率は$\dfrac{2(n-2)}{N}$となる。

(iv)　隣接点の個数が4のとき

(2)より$\dfrac{1}{2}(n-2)(n-1)$通りの場合があり，その確率は$\dfrac{(n-2)(n-1)}{2N}$となる。

(i)～(iv)より，隣接点の個数の期待値 E は,

$$E=\frac{1}{N}\left\{1\cdot 2+2\cdot n+3\cdot 2(n-1)+4\cdot\frac{1}{2}(n-2)(n-1)\right\}$$

$$=\frac{2}{(n+1)(n+2)}2n(n+1)=\frac{4n}{n+2}$$

すると，$E=\dfrac{4n}{n+2}\geqq 3$ となるのは，$4n\geqq 3n+6$ から，$n\geqq 6$ である。

［解 説］

格子点の個数と確率の融合問題です。領域 D の図を見ながら，個数を数えています。