1

解答解説のページへ

$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ とする。座標平面上で原点 O を通り傾きが $\tan\theta$ の直線を l とし，行列 $\begin{pmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換を f とする。座標平面上に 2 点 P, Q がある。次の問いに答えよ。

(1) 線分 OP が直線 l と垂直であるとき，1 次変換 f による点 P の像を求めよ。

(2) 1 次変換 f による点 Q の像を R とする。このとき $|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|\leqq|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ が成り立つことを示せ。さらに等号が成立する場合を調べよ。

(3) 1 次変換 f による点 $(1,\ 1)$ の像を S とする。このとき $|\overrightarrow{\mathrm{OS}}|$ が最大となる θ と最小となる θ をそれぞれ求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

座標平面上の点で，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。n を 3 以上の自然数とし，連立不等式

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq n$$

の表す領域を D とする。格子点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ に対して，領域 D 内の格子点 $\mathrm{B}(c,\ d)$ が $|a-c|+|b-d|=1$ を満たすとき，点 B を点 A の隣接点という。次の問いに答えよ。

(1) 領域 D 内の格子点のうち隣接点の個数が 4 であるものの個数を求めよ。

(2) 領域 D から格子点を 1 つ選ぶとき，隣接点の個数の期待値が 3 以上となるような n の範囲を求めよ。ただし，格子点の選ばれ方は同様に確からしいものとする。

(3) 領域 D から異なる格子点を 2 つ選ぶとき，互いに隣接点である確率を求めよ。ただし，異なる格子点の選ばれ方は同様に確からしいものとする。

3

解答解説のページへ

座標平面上の 2 点 A$(0,\ 1)$　B$(t,\ 0)$ を考える。ただし，$t \geqq 0$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 線分 AB を 1 辺とする正三角形は 2 つある。それぞれの正三角形について，2 点 A, B 以外の頂点の座標を t を用いて表せ。

(2) (1)で求めた 2 点のうち x 座標が小さい方を C とする。t を動かすとき，点 C の軌跡を図示せよ。

(3) k を定数とする。点 B と直線 $y = kx$ 上の点 P をそれぞれうまく選ぶことで 3 点 A, B, P を頂点とする正三角形ができるとき，k の値の範囲を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

平面上の 3 点 O, A, B は$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=1$かつ$\angle\mathrm{AOB}=\theta\ (0<\theta<\pi)$を満たすとする。線分 AB の中点を M とする。$t>1$として，点 C を$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-t\overrightarrow{\mathrm{OM}}$となるように定める。$\triangle\mathrm{ABC}$の面積を$S$とする。次の問いに答えよ。

(1) Sをtとθを用いて表せ。

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$のとき，$S$を$t$のみを用いて表せ。

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$のとき，$S$が最大となる$t$の値を求めよ。

$\boxed{5}$ 解答解説のページへ

次の問いに答えよ。ただし, e は自然対数の底である。

(1) $x \geqq 2$ のとき, $x^4e^{-3x} \leqq 16e^{-6}$ を示せ。また, これを用いて $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^3e^{-3x}$ を求めよ。

(2) k を定数とする。$x>0$ の範囲で方程式 $xe^{-3x} = \dfrac{k}{x^2}$ がちょうど 2 つの解 α, β $(\alpha<\beta)$ をもつような k の値の範囲を求めよ。

(3) (2)の α, β が $\beta = 2\alpha$ を満たすとき, 曲線 $y = xe^{-3x}$ $(x>0)$ と曲線 $y=\dfrac{k}{x^2}$ $(x>0)$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

1　　問題のページへ

(1)　点$(x,\ y)$のfによる像を点$(X,\ Y)$とすると,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos^2\theta + y\sin\theta\cos\theta \\ x\sin\theta\cos\theta + y\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

$$= (x\cos\theta + y\sin\theta)\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots(*)$$

さて, lの方向ベクトルを$\vec{u} = (\cos\theta,\ \sin\theta)$とすることができるので, 線分OPが直線$l$と垂直であるとき, tを実数として$\mathrm{P}(t\sin\theta,\ -t\cos\theta)$とおくと, $(*)$から,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = (t\sin\theta\cos\theta - t\cos\theta\sin\theta)\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって, fによる点Pの像は原点である。

(2)　$\mathrm{Q}(x,\ y)$, $\mathrm{R}(X,\ Y)$とおくと, $(*)$より,

$$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}| = |x\cos\theta + y\sin\theta|\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = |x\cos\theta + y\sin\theta| = |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\vec{u}|$$

ここで, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$と$\vec{u}$のなす角を$\varphi$とおくと,

$$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\cdot|\vec{u}|\cdot|\cos\varphi| = |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\cdot|\cos\varphi| \leqq |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$$

等号成立は, $|\cos\varphi| = 1$ $(\varphi = 0,\ \pi)$の場合で, このとき点Qはl上にある。

(3)　$(*)$より, 点$(1,\ 1)$の像Sは, $\overrightarrow{\mathrm{OS}} = (\cos\theta + \sin\theta)\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$より,

$$|\overrightarrow{\mathrm{OS}}| = |\cos\theta + \sin\theta|\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \sqrt{2}\left|\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\right|$$

ここで, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$から$-\frac{\pi}{4} < \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{3}{4}\pi$となることより, $|\overrightarrow{\mathrm{OS}}|$は$\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$すなわち$\theta = \frac{\pi}{4}$のとき最大値$\sqrt{2}$をとり, $\theta + \frac{\pi}{4} = 0$すなわち$\theta = -\frac{\pi}{4}$のとき最小値0をとる。

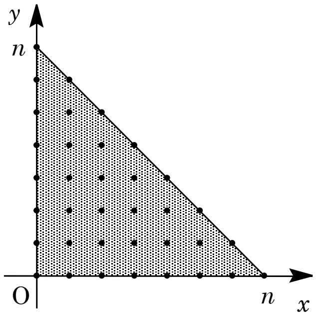
［解　説］

1 次変換を表す行列が逆行列をもたない場合で, このときは$(*)$が基本的な変形となります。なお, 上の解答例から推測できますが, fは直線 l への正射影を表します。

2

問題のページへ

(1)　まず, 連立不等式 $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $x+y \leqq n$ で表される領域 D は, 右図の網点部となる。ただし, 境界は領域に含まれる。



さて, a, b, c, d が整数で, $|a-c|+|b-d|=1$ のとき,

$$(a-c,\ b-d)=(\pm 1,\ 0),\ (0,\ \pm 1)$$

これより, 格子点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ に対して, その隣接点 $\mathrm{B}(c,\ d)$ は, 領域 D 内にあり,

$$(c,\ d)=(a-1,\ b),\ (a+1,\ b),\ (a,\ b-1),\ (a,\ b+1)$$

すると, 領域 D 内の格子点のうち隣接点の個数が 4 であるものは, 連立不等式 $x \geqq 1$, $y \geqq 1$, $x+y \leqq n-1$ で表される領域内の格子点である。その個数は,

$$1+2+\cdots+(n-2)=\frac{1}{2}(n-2)(n-1)$$

(2)　領域 D の境界線上の格子点 P について, 隣接点の個数は,

(i)　$\mathrm{P}(0,\ 0)$ のとき　隣接点は点 $(1,\ 0)$ と点 $(0,\ 1)$ となり, 個数は 2 である。

(ii)　$\mathrm{P}(n,\ 0)$ のとき　隣接点は点 $(n-1,\ 0)$ となり, 個数は 1 である。

(iii)　$\mathrm{P}(0,\ n)$ のとき　隣接点は点 $(0,\ n-1)$ となり, 個数は 1 である。

(iv)　$\mathrm{P}(k,\ 0)$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ のとき

隣接点は, 点 $(k-1,\ 0)$, 点 $(k,\ 1)$, 点 $(k+1,\ 0)$ となり, 個数は 3 である。

(v)　$\mathrm{P}(0,\ k)$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ のとき

隣接点は, 点 $(0,\ k-1)$, 点 $(1,\ k)$, 点 $(0,\ k+1)$ となり, 個数は 3 である。

(vi)　$\mathrm{P}(k,\ n-k)$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ のとき

隣接点は, 点 $(k-1,\ n-k)$ および点 $(k,\ n-k-1)$ となり, 個数は 2 である。

さて, 領域 D 内の格子点の総数 N は, $N=1+2+\cdots+(n+1)=\dfrac{1}{2}(n+1)(n+2)$

(a)　隣接点の個数が 1 のとき

(ii)(iii)より 2 通りの場合があり, その確率は $\dfrac{2}{N}$ となる。

(b)　隣接点の個数が 2 のとき

(i)(vi)より $1+(n-1)=n$ 通りの場合があり, その確率は $\dfrac{n}{N}$ となる。

(c)　隣接点の個数が 3 のとき

(iv)(v)より $2(n-1)$ 通りの場合があり, その確率は $\dfrac{2(n-2)}{N}$ となる。

(d)　隣接点の個数が 4 のとき

(1)より $\dfrac{1}{2}(n-2)(n-1)$ 通りの場合があり, その確率は $\dfrac{(n-2)(n-1)}{2N}$ となる。

(a)〜(d)より，隣接点の個数の期待値 E は,

$$E=\frac{1}{N}\left\{1\cdot2+2\cdot n+3\cdot2(n-1)+4\cdot\frac{1}{2}(n-2)(n-1)\right\}$$

$$=\frac{2}{(n+1)(n+2)}2n(n+1)=\frac{4n}{n+2}$$

すると，$E=\dfrac{4n}{n+2}\geqq3$ となるのは，$4n\geqq3n+6$ から，$n\geqq6$ である。

(3) 領域 D から異なる格子点を 2 つ選ぶとき，${}_N\mathrm{C}_2$ 通りの場合があり,

$${}_N\mathrm{C}_2=\frac{N(N-1)}{2}=\frac{1}{8}(n+1)(n+2)\{(n+1)(n+2)-2\}$$

$$=\frac{1}{8}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

2 つの格子点が隣接点のとき，その方向が上下または左右の 2 パターンあり,

$$(1+2+\cdots+n)\times2=n(n+1)$$

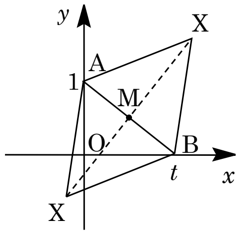
よって，その確率は，$\dfrac{8n(n+1)}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=\dfrac{8}{(n+2)(n+3)}$ である。

［解　説］

格子点の個数と確率の融合問題です。領域 D の図を見ながら，個数を数えています。なお, (2)までは文理共通です。

3

問題のページへ



(1)　線分ABの中点MはM$\left(\dfrac{t}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$となる。

また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(t,\ -1)$に垂直な単位ベクトル$\vec{e}$は，

$$\vec{e}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(1,\ t)$$

さて，線分 AB を 1 辺とする正三角形のもう 1 つの頂点をXとおくと，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{1+t^2}$，$|\overrightarrow{\mathrm{MX}}|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1+t^2}$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MX}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1+t^2}\,\vec{e}=\left(\frac{t}{2},\ \frac{1}{2}\right)\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1+t^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(1,\ t)$$

$$=\left(\frac{t}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

よって，X$\left(\dfrac{t}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$またはX$\left(\dfrac{t}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$

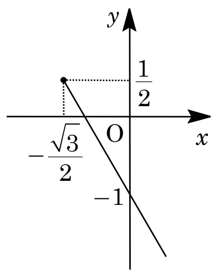
(2)　条件より，C$\left(\dfrac{t}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$となり，C$(x,\ y)$とおくと，

$$x=\frac{t}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdots\cdots\cdots①,\quad y=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}t\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$t=2x+\sqrt{3}$ となり，②に代入すると，

$$y=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}(2x+\sqrt{3})=-\sqrt{3}x-1$$

$t\geqq0$ から $x\geqq-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となり，点Cの軌跡は右図のようになる。



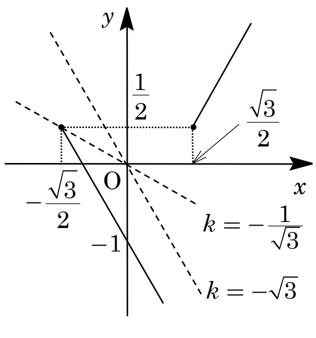
(3)　点C以外のもう1つの頂点D$\left(\dfrac{t}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$についても同様にすると，

$$y=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(2x-\sqrt{3})=\sqrt{3}x-1\quad\left(x\geqq\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

よって，点Cと点Dの軌跡は右図の実線となる。

さて，直線$y=kx$上の点Pに対して，3点A，B，Pを頂点とする正三角形ができるのは，点 C，D の軌跡と直線$y=kx$が共有点をもつことなので，

$$k<-\sqrt{3},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\leqq k$$

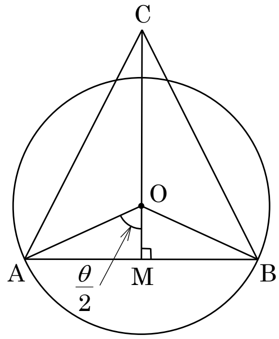


［解　説］

とらえにくい(3)の設問への誘導が，うまくつけられている問題です。なお，(1)の解答例では単位ベクトルを利用しましたが，回転を利用する方法もあります。

4

問題のページへ



(1)　△ABC は二等辺三角形であり，その面積 S は,

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CM}=\frac{1}{2}\cdot 2\mathrm{AM}\cdot(t+1)\mathrm{OM}$$

$$=(t+1)\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}(t+1)\sin\theta$$

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$ のとき，$t\cos\frac{\theta}{2}=1$ より，$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{t}$

$0<\theta<\pi$ から，$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}$ となり，(1)より，

$$S=(t+1)\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}\cdot\frac{1}{t}=\frac{(t+1)\sqrt{t^2-1}}{t^2}$$

(3)　$t>1$ のとき，(2)より，

$$S'=\frac{\left\{\sqrt{t^2-1}+(t+1)\cdot\frac{1}{2}(t^2-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2t\right\}t^2-(t+1)\sqrt{t^2-1}\cdot 2t}{t^4}$$

$$=\frac{(t^2-1+t^2+t)t^2-2(t+1)(t^2-1)t}{t^4\sqrt{t^2-1}}=\frac{(2t^2+t-1)t-2(t^3+t^2-t-1)}{t^3\sqrt{t^2-1}}$$

$$=\frac{-t^2+t+2}{t^3\sqrt{t^2-1}}=-\frac{(t-2)(t+1)}{t^3\sqrt{t^2-1}}$$

すると，S の増減は右表のようになり，$t=2$ のとき最大値をとる。

t	1	$\cdots$	2	$\cdots$
S'		$+$	0	$-$
S		↗		↘

［解　説］

図形量の最大・最小に，微分法を応用した基本題です。(3)はそのまま微分計算を行いましたが，S^2 を考えて，その式を微分しても構いません。

$\boxed{5}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　問題のページへ

(1)　$x \geqq 2$ のとき，$f(x) = x^4 e^{-3x}$ とおくと，

$$f'(x) = 4x^3 e^{-3x} - 3x^4 e^{-3x} = x^3(4-3x)e^{-3x} < 0$$

よって，$f(x) \leqq f(2) = 16e^{-6}$，すなわち $x^4 e^{-3x} \leqq 16e^{-6}$ が成立し，

$$0 < x^3 e^{-3x} \leqq \frac{16e^{-6}}{x}$$

すると，$x \to \infty$ のとき $\dfrac{16e^{-6}}{x} \to 0$ より，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^3 e^{-3x} = 0$

(2)　$x > 0$ のとき $g(x) = x^3 e^{-3x}$ とおき，$g(x) = k$ すなわち $xe^{-3x} = \dfrac{k}{x^2}$ が異なる 2 つの解をもつ条件を求める。

$$g'(x) = 3x^2 e^{-3x} - 3x^3 e^{-3x}$$
$$= 3x^2(1-x)e^{-3x}$$

そこで，(1)の結果を用いると，$g(x)$ の増減は右表のようになり，求める条件は，$0 < k < \dfrac{1}{e^3}$ である。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	↗	$\dfrac{1}{e^3}$	↘	0

(3)　(2)のもとで，2 つの解 $x = \alpha$，β $(\alpha < \beta)$ が $\beta = 2\alpha$ となるとき，

$$\alpha^3 e^{-3\alpha} = k \cdots\cdots\cdots ①,\quad 8\alpha^3 e^{-6\alpha} = k \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，$\alpha^3 e^{-3\alpha} = 8\alpha^3 e^{-6\alpha}$ となり，$e^{3\alpha} = 8$ から $e^{\alpha} = 2$ となり，

$$\alpha = \log 2,\quad k = \frac{1}{8}\alpha^3 = \frac{1}{8}(\log 2)^3$$

さて，$x > 0$ において，2 曲線 $y = xe^{-3x}$，$y = \dfrac{k}{x^2}$ で囲まれた部分の面積 S は，

$$S = \int_{\alpha}^{2\alpha}\left(xe^{-3x} - \frac{k}{x^2}\right)dx = \left[-\frac{1}{3}xe^{-3x}\right]_{\alpha}^{2\alpha} + \frac{1}{3}\int_{\alpha}^{2\alpha} e^{-3x}\,dx + \left[\frac{k}{x}\right]_{\alpha}^{2\alpha}$$

$$= -\frac{1}{3}(2\alpha e^{-6\alpha} - \alpha e^{-3\alpha}) - \frac{1}{9}\left[e^{-3x}\right]_{\alpha}^{2\alpha} + k\left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{\alpha}\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{32}\alpha - \frac{1}{8}\alpha\right) - \frac{1}{9}(e^{-6\alpha} - e^{-3\alpha}) - \frac{\alpha^3}{8}\cdot\frac{1}{2\alpha}$$

$$= -\frac{1}{16}\alpha^2 + \frac{1}{32}\alpha - \frac{1}{9}\left(\frac{1}{64} - \frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{16}(\log 2)^2 + \frac{1}{32}\log 2 + \frac{7}{576}$$

［解 説］

微積分の融合問題ですが，ていねいな誘導がついています。最後の定積分の計算は，先を読みながら行わないと面倒なことになります。