1　解答解説のページへ

座標平面上で, 原点 O を中心とする半径 1 の円を C とする。C の外部にある点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から C に引いた 2 本の接線と C との接点を H, H$'$ とする。$\angle\mathrm{OPH}=\theta$ とするとき, 次の問いに答えよ。

(1)　PH の長さ, および $\sin\theta$ を $a,\ b$ を用いて表せ。

(2)　$\mathrm{HH}'=\mathrm{OP}$ となるような点 P の軌跡を求めよ。

2

解答解説のページへ

a_1，a_2，a_3 は定数で，$a_1>0$ とする。放物線 $C: y=a_1x^2+a_2x+a_3$ 上の点 $\mathrm{P}(2,\ 4a_1+2a_2+a_3)$ における接線を l とし，l と x 軸との交点を $\mathrm{Q}(q,\ 0)$，l と y 軸との交点を $\mathrm{R}(0,\ a_4)$ とする。a_1，a_2，a_3，a_4 がこの順に等差数列であるとき，次の問いに答えよ。

(1) a_2，a_3，a_4 を a_1 を用いて表せ。

(2) q の値を求めよ。

(3) 放物線 C，接線 l，および y 軸で囲まれた部分の面積を S とする。$S=q$ となるとき，a_1 を求めよ。

3

解答解説のページへ

四面体 OABC において，△OAB の重心を F，△OAC の重心を G とする。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{FG}} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であることを示せ。

(3) $\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1$，$\angle\mathrm{BOC}=90^\circ$ のとき，FG の長さを求めよ。

4　解答解説のページへ

$\alpha > 1$ とする。数列$\{a_n\}$を

$$a_1 = \alpha\ ,\ \ a_{n+1} = \sqrt{\frac{2a_n}{a_n+1}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める。次の不等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$a_n > 1\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2)　$\sqrt{x}-1 \leqq \dfrac{1}{2}(x-1)$（ただし，$x>1$ とする。）

(3)　$a_n - 1 \leqq \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}(\alpha-1)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$\boxed{5}$ 解答解説のページへ

正六角形の頂点を反時計回りにP_1，P_2，P_3，P_4，P_5，P_6とする。1 個のさいころを 2 回投げて，出た目を順にj, kとする。次の問いに答えよ。

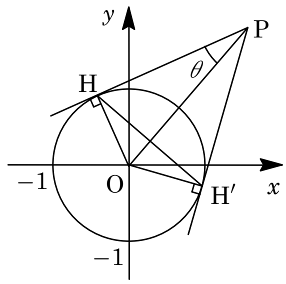
(1) P_1，P_j，P_kが異なる 3 点となる確率を求めよ。

(2) P_1，P_j，P_kが正三角形の 3 頂点となる確率を求めよ。

(3) P_1，P_j，P_kが直角三角形の 3 頂点となる確率を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　$\angle\mathrm{OHP}=90^\circ$ より，$\mathrm{PH}=\sqrt{\mathrm{OP}^2-\mathrm{OH}^2}=\sqrt{a^2+b^2-1}$

$$\sin\theta=\frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OP}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

(2)　$\angle\mathrm{OPH}=\angle\mathrm{OPH'}=\theta$，$\mathrm{OP}\perp\mathrm{HH'}$ より，

$$\mathrm{HH'}=2\mathrm{PH}\sin\theta=\frac{2\sqrt{a^2+b^2-1}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$\mathrm{HH'}=\mathrm{OP}$ から，$\dfrac{2\sqrt{a^2+b^2-1}}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{a^2+b^2}$ となり，

$$2\sqrt{a^2+b^2-1}=a^2+b^2,\ \ 4(a^2+b^2-1)=(a^2+b^2)^2$$

すると，$(a^2+b^2)^2-4(a^2+b^2)+4=0$，$(a^2+b^2-2)^2=0$ より，

$$a^2+b^2-2=0,\ \ a^2+b^2=2\cdots\cdots\cdots(*)$$

なお，(＊)は，点 P が円 C の外部にあるという条件を満たしている。

以上より，点 P は原点を中心として半径 $\sqrt{2}$ の円を描く。

［解　説］

よく見かける構図の問題です。円と直線に関する図形的な性質について，その証明は省いた形の解答例です。

$\boxed{2}$ 問題のページへ

(1)　$C: y = a_1x^2 + a_2x + a_3$ ……①に対し，$y' = 2a_1x + a_2$ から点 $\mathrm{P}(2,\ 4a_1 + 2a_2 + a_3)$ における接線 l の方程式は，$y - (4a_1 + 2a_2 + a_3) = (4a_1 + a_2)(x - 2)$ となり，

$$y = (4a_1 + a_2)x - 4a_1 + a_3 \cdots\cdots\cdots②$$

l と y 軸との交点が $\mathrm{R}(0,\ a_4)$ より，$a_4 = -4a_1 + a_3$ ………③

さて，a_1，a_2，a_3，a_4 はこの順に等差数列なので，公差を d とすると，

$$a_2 = a_1 + d \cdots\cdots\cdots④,\ a_3 = a_1 + 2d \cdots\cdots\cdots⑤,\ a_4 = a_1 + 3d \cdots\cdots\cdots⑥$$

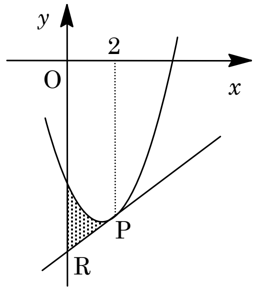
③⑤⑥より，$-4a_1 + a_1 + 2d = a_1 + 3d$，$d = -4a_1$ となり，④⑤⑥に代入すると，

$$a_2 = a_1 - 4a_1 = -3a_1,\ a_3 = a_1 - 8a_1 = -7a_1,\ a_4 = a_1 - 12a_1 = -11a_1$$

(2)　(1)の結果を②に代入すると，$y = (4a_1 - 3a_1)x - 4a_1 - 7a_1 = a_1x - 11a_1$

点 $\mathrm{Q}(q,\ 0)$ を通ることより，$a_1q - 11a_1 = 0$，$q = 11$

(3)　(1)の結果を①に代入すると，$y = a_1x^2 - 3a_1x - 7a_1$



ここで，C と l と y 軸で囲まれた部分の面積 S は，

$$S = \int_0^2 (a_1x^2 - 3a_1x - 7a_1 - a_1x + 11a_1)\,dx$$

$$= a_1\int_0^2 (x-2)^2\,dx = a_1\Big[\frac{1}{3}(x-2)^3\Big]_0^2 = \frac{8}{3}a_1$$

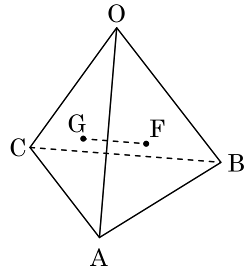
条件より $S = q$ なので，$\frac{8}{3}a_1 = 11$ から $a_1 = \frac{33}{8}$ である。

［解 説］

数列と微積分の融合問題です。文字が多いのですが，それを整理するような設問が，(1)で付いています。

3

問題のページへ



(1)　F は△OAB の重心より，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})$

(2)　G は△OAC の重心より，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})$

$$\overrightarrow{\mathrm{FG}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})-\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

$$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{FG}}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ である。

(3)　$\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1$，$\angle\mathrm{BOC}=90^\circ$ より，△BOC は直角二等辺三角形である。

これより，$\mathrm{BC}=\sqrt{2}$ となり，(2)の結果から，

$$\mathrm{FG}=|\overrightarrow{\mathrm{FG}}|=\frac{1}{3}|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

［解 説］

空間ベクトルの基本の確認のみです。この程度の記述でよいのか迷うほどです。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　漸化式　$a_1=\alpha>1$，$a_{n+1}=\sqrt{\dfrac{2a_n}{a_n+1}}$ で定められる数列$\{a_n\}$に対して，$a_n>1$ であることを，数学的帰納法を用いて証明する。

(i)　$n=1$ のとき　$a_1=\alpha>1$ より成立する。

(ii)　$n=k$ のとき　$a_k>1$ と仮定する。

$$a_{k+1}-1=\sqrt{\frac{2a_k}{a_k+1}}-1=\frac{\sqrt{2a_k}-\sqrt{a_k+1}}{\sqrt{a_k+1}}=\frac{a_k-1}{\sqrt{a_k+1}\left(\sqrt{2a_k}+\sqrt{a_k+1}\right)}>0$$

(i)(ii)より，すべての自然数 n に対して，$a_n>1$ である

(2)　$x>1$ のとき，$x-1-2(\sqrt{x}-1)=x-2\sqrt{x}+1=(\sqrt{x}-1)^2>0$ より，

$$x-1\geqq 2(\sqrt{x}-1)，\ \sqrt{x}-1\leqq\frac{1}{2}(x-1)\cdots\cdots\cdots(*)$$

(3)　(1)より $a_n>1$ なので，$\dfrac{2a_n}{a_n+1}-1>0$ となり，$(*)$を適用すると，

$$a_{n+1}-1=\sqrt{\frac{2a_n}{a_n+1}}-1\leqq\frac{1}{2}\left(\frac{2a_n}{a_n+1}-1\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{a_n-1}{a_n+1}<\frac{1}{2}\cdot\frac{a_n-1}{2}=\frac{1}{4}(a_n-1)$$

これより，$n\geqq 2$ のとき，$a_n-1<\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}(a_1-1)=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}(\alpha-1)$

また，$n=1$ のときは，$a_1-1=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{1-1}(\alpha-1)$ となるので，

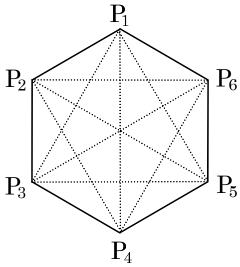
$$a_n-1\leqq\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}(\alpha-1)\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

［解　説］

漸化式と不等式の問題です。(1)(2)を誘導として(3)につなげるという意図と思えますので，その通りにしました。ただ，(1)の証明を上記のように行うと，(2)の不等式は不可欠ではありません。

$\boxed{5}$

問題のページへ



(1)　P_1，P_j，P_k が異なる 3 点となる場合は，$(i,\ j)$ が $i\neq 1$ かつ $j\neq 1$ かつ $i\neq j$ のときより，${}_5P_2=20$ 通りある。

その確率は，$\dfrac{20}{6^2}=\dfrac{5}{9}$ である。

(2)　P_1，P_j，P_k が正三角形の 3 頂点となる場合は，$(i,\ j)$ が $(3,\ 5)$，$(5,\ 3)$ のときより，2 通りある。

その確率は，$\dfrac{2}{6^2}=\dfrac{1}{18}$ である。

(3)　P_1，P_j，P_k が直角三角形の 3 頂点となる場合は，$i<j$ のとき，

(i)　P_1P_4 が斜辺　$(i,\ j)=(2,\ 4)$，$(3,\ 4)$，$(4,\ 5)$，$(4,\ 6)$

(ii)　P_2P_5 が斜辺　$(i,\ j)=(2,\ 5)$

(iii)　P_3P_6 が斜辺　$(i,\ j)=(3,\ 6)$

(i)～(iii)より，$i>j$ のときも考えると，その確率は，$\dfrac{6\times 2}{6^2}=\dfrac{1}{3}$ である。

［解 説］

確率の基本題ですが，裏があるのかと勘繰るほどの内容です。