1

解答解説のページへ

$a,\ b$ を実数，$a>0$ として，行列 $A=\begin{pmatrix} a & 2 \\ -2 & b \end{pmatrix}$ の定める 1 次変換を f とする。f によって，点 $\mathrm{P}(1,\ 0)$ が点 P_1 に移され，点 P_1 が点 P_2 に移されるものとする。P が線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の中点であるとき，次の問いに答えよ。

(1) a, b を求めよ。

(2) ある実数 c に対して $c\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}=(v_1,\ v_2)$ とすると，$A\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ が成り立つ。c を求めよ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{PP}_1}=(w_1,\ w_2)$ とする。すべての自然数 n に対して，$A^n\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}=(-2)^n\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ が成り立つことを，数学的帰納法によって証明せよ。

(4) (2)と(3)の $v_1,\ v_2,\ w_1,\ w_2$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s(v_1,\ v_2)+t(w_1,\ w_2)$ となる実数 $s,\ t$ を求め，$A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を n を用いて表せ。ただし，n は自然数である。

2

解答解説のページへ

2 つの関数 $f(x)=x\sin x$, $g(x)=\sqrt{3}x\cos x$ について，次の問いに答えよ。ただし，(3)と(4)において，a および $h(x)$ は(2)で定めたものとする。

(1) 2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ の共有点のうち，x 座標が $-\pi\leqq x\leqq\pi$ であるものをすべて求めよ。

(2) (1)で求めた共有点のうち，x 座標が正である点を $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ とする。点 A における曲線 $y=g(x)$ の接線を $y=h(x)$ と表す。$h(x)$ を求めよ。

(3) $0\leqq x\leqq a$ のとき，$h(x)\geqq g(x)$ であることを示せ。

(4) $0\leqq x\leqq a$ の範囲において，y 軸，曲線 $y=g(x)$，および直線 $y=h(x)$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

3

解答解説のページへ

四面体 OABC において $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=1$ とする。$\triangle\mathrm{OAB}$ の重心を F, $\triangle\mathrm{OAC}$ の重心を G とし, 辺 OA の中点を M とする。また, $\angle\mathrm{BOC}=2\theta$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{FG}} \parallel \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であることを示せ。

(3) $\triangle\mathrm{MBC}$ の面積を θ を用いて表せ。

4

解答解説のページへ

$\alpha > 1$とする。数列$\{a_n\}$を

$$a_1 = \alpha\ ,\ \ a_{n+1} = \sqrt{\frac{2a_n}{a_n + 1}}\quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める。次の不等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$a_n > 1\quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2)　$\sqrt{x} - 1 \leqq \frac{1}{2}(x-1)$（ただし，$x \geqq 0$とする。）

(3)　$a_n - 1 \leqq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}(\alpha - 1)\quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

5　解答解説のページへ

1 辺の長さが 1 の正六角形において，頂点を反時計回りに P_1，P_2，P_3，P_4，P_5，P_6 とする。1 個のさいころを 2 回投げて，出た目を順に j, k とする。P_1，P_j，P_k が異なる 3 点となるとき，この 3 点を頂点とする三角形の面積を S とする。P_1，P_j，P_k が異なる 3 点とならないときは，$S=0$ と定める。次の問いに答えよ。

(1)　$S>0$ となる確率を求めよ。

(2)　S が最大となる確率を求めよ。

(3)　S の期待値を求めよ。

1　　　　問題のページへ

(1)　点 $\mathrm{P}(1,\ 0)$ に対して,

$$\begin{pmatrix} a & 2 \\ -2 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ -2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a & 2 \\ -2 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2-4 \\ -2a-2b \end{pmatrix}$$

すると, $\mathrm{P_1}(a,\ -2)$, $\mathrm{P_2}(a^2-4,\ -2a-2b)$ となり, P が線分 $\mathrm{P_1P_2}$ の中点より,

$$a+a^2-4=2\cdots\cdots\cdots①,\ -2-2a-2b=0\cdots\cdots\cdots②$$

①より, $(a-2)(a+3)=0$ となり, $a>0$ から, $a=2$

②に代入して, $-2-4-2b=0$ から, $b=-3$

(2)　$(v_1,\ v_2)=c\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}=c(1,\ 0)+(2,\ -2)=(c+2,\ -2)$ となり, 条件より,

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって, $v_1+2v_2=0$ から, $c+2-4=0$ となり, $c=2$

(3)　$(w_1,\ w_2)=\overrightarrow{\mathrm{PP_1}}=\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1,\ -2)$ であるとき, すべての自然数 n に対して,

$A^n\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}=(-2)^n\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ が成り立つことを, 数学的帰納法によって証明する。

(i)　$n=1$ のとき　$A\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}=(-2)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ となり成立。

(ii)　$n=k$ のとき　$A^k\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}=(-2)^k\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ であると仮定する。

$$A^{k+1}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}=AA^k\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}=(-2)^kA\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}=(-2)^k(-2)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}=(-2)^{k+1}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(i)(ii)より, すべての自然数 n に対して, $A^n\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}=(-2)^n\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$

(4)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s(v_1,\ v_2)+t(w_1,\ w_2)$ より, $(1,\ 0)=s(4,\ -2)+t(1,\ -2)$

$$4s+t=1\cdots\cdots\cdots③,\ -2s-2t=0\cdots\cdots\cdots④$$

③④より, $s=\dfrac{1}{3}$, $t=-\dfrac{1}{3}$ となり, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{3}(v_1,\ v_2)-\dfrac{1}{3}(w_1,\ w_2)$ から, (2)と(3)の結果を利用すると,

$$A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}A^n\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}-\frac{1}{3}A^n\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}-\frac{(-2)^n}{3}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}-\frac{(-2)^n}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4-(-2)^n \\ -2-(-2)^{n+1} \end{pmatrix}$$

［解　説］

行列の n 乗についての有名問題です。誘導に従って計算を進めると, 方針に迷うことはないでしょう。

2

問題のページへ

(1)　$f(x)=x\sin x$，$g(x)=\sqrt{3}x\cos x$ に対して，$y=f(x)$，$y=g(x)$ を連立し，

$$x\sin x=\sqrt{3}x\cos x,\ \ x(\sin x-\sqrt{3}\cos x)=0,\ \ 2x\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0$$

$-\pi\leqq x\leqq\pi$ であるものは，$x=-\frac{2}{3}\pi,\ 0,\ \frac{\pi}{3}$

よって，共有点の座標は，$\left(-\frac{2}{3}\pi,\ \frac{\sqrt{3}}{3}\pi\right)$，$(0,\ 0)$，$\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{6}\pi\right)$

(2)　条件より，$\mathrm{A}\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{6}\pi\right)$ となり，$g'(x)=\sqrt{3}\cos x-\sqrt{3}x\sin x$ から，

$$g'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{2}$$

すると，点 A における曲線 $y=g(x)$ の接線は，

$$y-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right),\ \ y=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{2}\right)x+\frac{\pi^2}{6}$$

この接線を $y=h(x)$ とおくと，$h(x)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{2}\right)x+\frac{\pi^2}{6}$

(3)　$l(x)=h(x)-g(x)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{2}\right)x+\frac{\pi^2}{6}-\sqrt{3}x\cos x$ とおくと，(2)より，

$$l\left(\frac{\pi}{3}\right)=h\left(\frac{\pi}{3}\right)-g\left(\frac{\pi}{3}\right)=0\cdots\cdots\cdots①,\ \ l'\left(\frac{\pi}{3}\right)=h'\left(\frac{\pi}{3}\right)-g'\left(\frac{\pi}{3}\right)=0\cdots\cdots\cdots②$$

さて，$l'(x)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{2}\right)-\sqrt{3}\cos x+\sqrt{3}x\sin x$

$$l''(x)=\sqrt{3}\sin x+\sqrt{3}\sin x+\sqrt{3}x\cos x=2\sqrt{3}\sin x+\sqrt{3}x\cos x$$

$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{3}$ において，$l''(x)\geqq 0$ より $l'(x)$ は単調増加し，②より $l'(x)\leqq l'\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$

よって，$l(x)$ は単調減少し，①より $l(x)\geqq l\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$ となり，$h(x)\geqq g(x)$ である。

(4)　y 軸，曲線 $y=g(x)$，および直線 $y=h(x)$ で囲まれた部分の面積 S は，(3)より，

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{3}}l(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{2}\right)x+\frac{\pi^2}{6}-\sqrt{3}x\cos x\right\}dx$$

$$=\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\frac{x^2}{2}+\frac{\pi^2}{6}x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\sqrt{3}\left[x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin x\,dx$$

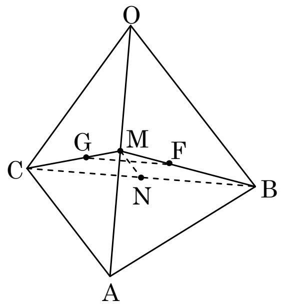
$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\frac{\pi^2}{18}+\frac{\pi^3}{18}-\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{\pi^3}{36}+\frac{\sqrt{3}}{36}\pi^2-\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

［解　説］

微積分の総合問題です。(3)の設問から，面積を求める際に，あらかじめ図を描いておくという作業は，必須というわけではなくなってきます。

3

問題のページへ



(1)　F は△OAB の重心より，$\overrightarrow{OF}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$

(2)　G は△OAC の重心より，$\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})$

$$\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OF}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})-\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$$

$$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

よって，$\overrightarrow{FG} \,/\!/\, \overrightarrow{BC}$ である。

(3)　$OA=OB=OC=AB=AC=1$ より，△OAB, △OAC は正三角形であり，

$$MB=MC=1\cdot\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

すると，△MBC は二等辺三角形となり，辺 BC の中点を N とおくと，$MN\perp BC$ である。さらに，$ON\perp BC$，$\angle BOC=2\theta$ から，$\angle BON=\theta$ となり，

$$BC=2BN=2\cdot 1\cdot\sin\theta=2\sin\theta,\quad MN=\sqrt{MB^2-NB^2}=\sqrt{\frac{3}{4}-\sin^2\theta}$$

よって，△MBC の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}BC\cdot MN=\frac{1}{2}\cdot 2\sin\theta\sqrt{\frac{3}{4}-\sin^2\theta}=\frac{1}{2}\sin\theta\sqrt{3-4\sin^2\theta}$$

［解　説］

空間ベクトルの基本の確認です。(3)は二等辺三角形に着目すると，利用するのは三平方の定理だけです。

4

問題のページへ

(1)　漸化式　$a_1=\alpha>1$，$a_{n+1}=\sqrt{\dfrac{2a_n}{a_n+1}}$ で定められる数列$\{a_n\}$に対して，$a_n>1$ であることを，数学的帰納法を用いて証明する。

(i)　$n=1$ のとき　$a_1=\alpha>1$ より成立する。

(ii)　$n=k$ のとき　$a_k>1$ と仮定する。

$$a_{k+1}-1=\sqrt{\frac{2a_k}{a_k+1}}-1=\frac{\sqrt{2a_k}-\sqrt{a_k+1}}{\sqrt{a_k+1}}=\frac{a_k-1}{\sqrt{a_k+1}\left(\sqrt{2a_k}+\sqrt{a_k+1}\right)}>0$$

(i)(ii)より，すべての自然数 n に対して，$a_n>1$ である

(2)　$x\geqq 0$ のとき，$x-1-2(\sqrt{x}-1)=x-2\sqrt{x}+1=(\sqrt{x}-1)^2\geqq 0$ より，

$$x-1\geqq 2(\sqrt{x}-1)\,,\ \ \sqrt{x}-1\leqq\frac{1}{2}(x-1)\cdots\cdots\cdots(*)$$

(3)　(1)より $a_n>1$ なので，$\dfrac{2a_n}{a_n+1}-1=\dfrac{a_n-1}{a_n+1}>0$ となり，$(*)$を適用すると，

$$a_{n+1}-1=\sqrt{\frac{2a_n}{a_n+1}}-1\leqq\frac{1}{2}\left(\frac{2a_n}{a_n+1}-1\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{a_n-1}{a_n+1}<\frac{1}{2}\cdot\frac{a_n-1}{2}=\frac{1}{4}(a_n-1)$$

これより，$n\geqq 2$ のとき，$a_n-1<\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}(a_1-1)=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}(\alpha-1)$

また，$n=1$ のときは，$a_1-1=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{1-1}(\alpha-1)$ となるので，

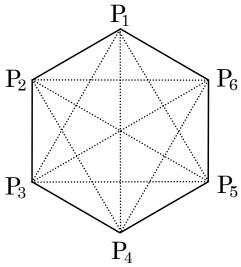
$$a_n-1\leqq\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}(\alpha-1)\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

［解 説］

漸化式と不等式の問題です。(1)(2)を誘導として(3)につなげるという意図と思えますので，その通りにしました。ただ，(1)の証明を上記のように行うと，(2)の不等式は不可欠ではありません。

$\boxed{5}$

問題のページへ



(1)　P_1，P_j，P_k を頂点とする三角形の面積 S について，$S>0$ となる場合は，P_1，P_j，P_k が異なる 3 点のときである。

すなわち，$(i,\ j)$ が $i\neq 1$ かつ $j\neq 1$ かつ $i\neq j$ を満たすときより，その場合の数は ${}_5P_2=20$ 通りある。

よって，その確率は $\dfrac{20}{6^2}=\dfrac{5}{9}$ となる。

(2)　P_1，P_j，P_k を頂点とする三角形は，次の 3 種類となる。

(i)　$\triangle P_1P_2P_3$ と合同な二等辺三角形　$S=\dfrac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

(ii)　$\triangle P_1P_2P_4$ と合同な直角三角形　$S=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(iii) 正三角形 $P_1P_3P_5$　$S=\dfrac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin\dfrac{2}{3}\pi\times 3=\dfrac{3}{4}\sqrt{3}$

(i)～(iii)より，面積が最大となるのは，正三角形 $P_1P_3P_5$ の場合である。

このとき，$(i,\ j)=(3,\ 5)$，$(5,\ 3)$ より，その確率は $\dfrac{2}{6^2}=\dfrac{1}{18}$ である。

(3)　(i)　$\triangle P_1P_2P_3$ と合同な二等辺三角形のとき

$(i,\ j)=(2,\ 3)$，$(3,\ 2)$，$(2,\ 6)$，$(6,\ 2)$，$(5,\ 6)$，$(6,\ 5)$ より 6 通りとなり，その確率は $\dfrac{6}{6^2}=\dfrac{1}{6}$ である。

(ii)　$\triangle P_1P_2P_4$ と合同な直角三角形のとき

(1)(2)の結果より，その確率は，$\dfrac{5}{9}-\dfrac{1}{18}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}$ である。

以上より，S の期待値 E は，

$$E=0\times\left(1-\frac{5}{9}\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\sqrt{3}\times\frac{1}{18}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

［解　説］

確率の基本題です。なお，(3)の(ii)の場合は，斜辺の位置で場合分けをして直接的に求めても構いません。