1

解答解説のページへ

a, b, c を実数とし，$a<1$ とする。座標平面上の 2 曲線

$$C_1 : y = x^2 - x\,,\ C_2 : y = x^3 + bx^2 + cx - a$$

を考える。C_1 と C_2 は，点 $\mathrm{P}(1,\ 0)$ と，それとは異なる点 Q を通る。また，点 P における C_1 と C_2 の接線の傾きは等しいものとする。点 P における C_1 の接線を l_1，点 Q における C_1 の接線を l_2，点 Q における C_2 の接線を l_3 とする。次の問いに答えよ。

(1) b, c および点 Q の座標を a を用いて表せ。

(2) l_1，l_2，l_3 が三角形をつくらないような a の値を求めよ。

(3) l_1，l_2，l_3 が直角三角形をつくるような a の値の個数を求めよ。

2

解答解説のページへ

n を自然数とし，p_n，q_n を実数とする。ただし，p_1，q_1 は $p_1^2 - 4q_1 = 4$ を満たすとする。2 次方程式 $x^2 - p_n x + q_n = 0$ は異なる実数解 α_n，β_n をもつとする。ただし，$\alpha_n < \beta_n$ とする。$c_n = \beta_n - \alpha_n$ とおくとき，数列 $\{c_n\}$ は

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1)　$r_n = \log_2(n\sqrt{n} + \sqrt{n})$ とするとき，$\dfrac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}$ を r_n，r_{n+1} を用いて表せ。

(2)　c_n を n の式で表せ。

(3)　$p_n = n\sqrt{n}$ であるとき，q_n を n の式で表せ。

3

解答解説のページへ

座標平面上に原点 O と 2 点 A(1, 0)，B(0, 1) をとり，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする。点 C は $|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$，$0^\circ<\angle\mathrm{AOC}<90^\circ$，$0^\circ<\angle\mathrm{BOC}<90^\circ$ を満たすとする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=t$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，t を用いて表せ。

(2) 線分 AB と線分 OC の交点を D とする。$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，t を用いて表せ。

(3) 点 C から線分 OA に引いた垂線と線分 AB の交点を E とする。D は(2)で定めた点とする。このとき，△OBD と△CDE の面積の和を t を用いて表せ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

α，β は $\alpha>0$，$\beta>0$，$\alpha+\beta<1$ を満たす実数とする。3 つの放物線

$$C_1 : y = x(1-x),\ C_2 : y = x(1-\beta-x),\ C_3 : y = (x-\alpha)(1-x)$$

を考える。C_2 と C_3 の交点の x 座標を γ とする。また，C_1，C_2，C_3 で囲まれた図形の面積を S とする。次の問いに答えよ。

(1)　γ を α，β を用いて表せ。

(2)　S を α，β を用いて表せ。

(3)　α，β が $\alpha+\beta=\dfrac{1}{4}$ を満たしながら動くとき，S の最大値を求めよ。

5

解答解説のページへ

n を自然数とする。A, B, C, D, E の 5 人が 1 個のボールをパスし続ける。最初に A がボールを持っていて，A は自分以外の誰かに同じ確率でボールをパスし，ボールを受けた人は，また自分以外の誰かに同じ確率でボールをパスし，以後同様にパスを続ける。n 回パスしたとき，B がボールを持っている確率を p_n とする。ここで，たとえば，A→C→D→A→E の順にボールをパスすれば，4 回パスしたと考える。次の問いに答えよ。

(1)　p_1，p_2，p_3，p_4 を求めよ。

(2)　p_n を求めよ。

1　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　問題のページへ

(1)　$C_1 : y = x^2 - x$ ……①，$C_2 : y = x^3 + bx^2 + cx - a$ ……②に対して，

①より $y' = 2x - 1$ ……③，②より $y' = 3x^2 + 2bx + c$ ……④

ここで，C_2 が点 $\mathrm{P}(1,\ 0)$ を通ることより，②から $1 + b + c - a = 0$ ………⑤

また，点 P における C_1 と C_2 の接線の傾きは等しいことより，③④から，

$2 - 1 = 3 + 2b + c$，$c = -2b - 2$ ………⑥

⑤⑥より，$1 + b - 2b - 2 - a = 0$ となり $b = -a - 1$，$c = -2(-a-1) - 2 = 2a$

②に代入すると，$C_2 : y = x^3 - (a+1)x^2 + 2ax - a$ ………⑦

次に，①⑦を連立すると，$x^2 - x = x^3 - (a+1)x^2 + 2ax - a$ となり，

$x^3 - (a+2)x^2 + (2a+1)x - a = 0$，$(x-1)^2(x-a) = 0$

よって，点 Q の座標は，$x \neq 1$ から，$\mathrm{Q}(a,\ a^2 - a)$ である。

(2)　まず，l_1，l_2，l_3 の方向ベクトルを，それぞれ $\overrightarrow{u_1}$，$\overrightarrow{u_2}$，$\overrightarrow{u_3}$ とおくと，(1)より，

$\overrightarrow{u_1} = (1,\ 1)$，$\overrightarrow{u_2} = (1,\ 2a-1)$

⑦から $y' = 3x^2 - 2(a+1)x + 2a$ より，$\overrightarrow{u_3} = (1,\ 3a^2 - 2(a+1)a + 2a) = (1,\ a^2)$

さて，l_1，l_2，l_3 が三角形をつくらない条件は，$a < 1$ のもとで，

(i)　$l_1 /\!/ l_2$ のとき　$\overrightarrow{u_1} /\!/ \overrightarrow{u_2}$ より $2a - 1 = 1$ となるが，$a = 1$ から不適。

(ii)　$l_1 /\!/ l_3$ のとき　$\overrightarrow{u_1} /\!/ \overrightarrow{u_3}$ より $a^2 = 1$ となり，$a = -1$

(iii)　$l_2 /\!/ l_3$ のとき　$\overrightarrow{u_2} /\!/ \overrightarrow{u_3}$ より $a^2 = 2a - 1$ となるが，$a = 1$ から不適。

(iv)　l_1，l_2，l_3 が 1 点で交わるとき　$l_1 : y = x - 1$ が，l_2 と l_3 の交点 Q を通る。

すると，$a^2 - a = a - 1$ となるが，$a = 1$ から不適。

(i)～(iv)より，求める a の値は $a = -1$ である。

(3)　l_1，l_2，l_3 が直角三角形をつくる条件は，$a < 1$ かつ $a \neq -1$ のもとで，

(i)　$l_1 \perp l_2$ のとき　$\overrightarrow{u_1} \perp \overrightarrow{u_2}$ より $1 + (2a-1) = 0$ となり，$a = 0$

(ii)　$l_1 \perp l_3$ のとき　$\overrightarrow{u_1} \perp \overrightarrow{u_3}$ より $1 + a^2 = 0$ となり不適。

(iii)　$l_2 \perp l_3$ のとき　$\overrightarrow{u_2} \perp \overrightarrow{u_3}$ より $1 + a^2(2a-1) = 0$，$2a^3 - a^2 + 1 = 0$ ………⑧

$f(a) = 2a^3 - a^2 + 1$ とおくと，

$f'(a) = 6a^2 - 2a = 2a(3a-1)$

$f(-1) = -2 \neq 0$ より，右表から，⑧の解は -1 と 0 の間にただ 1 つ存在する。

a	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
$f'(a)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(a)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{26}{27}$	$\nearrow$	

(i)～(iii)より，求める a の個数は 2 個である。

［解　説］

直線の式についての基本の確認だけですが，妙に疲れる問題です。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　$r_n = \log_2(n\sqrt{n}+\sqrt{n}) = \log_2\sqrt{n}\,(n+1)$ より，$r_{n+1} = \log_2\sqrt{n+1}\,(n+2)$ となり，

$$r_{n+1}-r_n = \log_2\frac{\sqrt{n+1}\,(n+2)}{\sqrt{n}\,(n+1)} = \log_2\frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}$$

よって，$\dfrac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}} = 2^{r_{n+1}-r_n}$ ………①

(2)　①より，$\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = 2^{r_{n+1}-r_n}$ となり，$c_{n+1} = 2^{r_{n+1}-r_n}c_n$

ここで，$f(n) = 2^{r_{n+1}-r_n}$ とおくと，$c_{n+1} = f(n)c_n$ となり，$n \geqq 2$ において，

$$c_n = c_1 f(1) f(2)\cdots f(n-1) = c_1\cdot 2^{r_2-r_1}\cdot 2^{r_3-r_2}\cdot\cdots\cdot 2^{r_n-r_{n-1}} = c_1\cdot 2^{r_n-r_1}$$

$$= c_1\cdot 2^{\log_2\sqrt{n}\,(n+1)-\log_2 2} = c_1\cdot 2^{\log_2\sqrt{n}\,(n+1)-1} \text{ ………②}$$

さて，$x^2 - p_n x + q_n = 0$ の実数解を α_n，β_n $(\alpha_n < \beta_n)$ とすると，

$$\alpha_n = \frac{p_n - \sqrt{{p_n}^2 - 4q_n}}{2},\quad \beta_n = \frac{p_n + \sqrt{{p_n}^2 - 4q_n}}{2}$$

すると，$c_n = \beta_n - \alpha_n = \sqrt{{p_n}^2 - 4q_n}$ となり，$c_1 = \sqrt{{p_1}^2 - 4q_1} = \sqrt{4} = 2$

よって，②より，$c_n = 2\cdot 2^{\log_2\sqrt{n}\,(n+1)-1} = 2^{\log_2\sqrt{n}\,(n+1)} = \sqrt{n}\,(n+1)$ ………③

なお，③は $n=1$ のときも成立している。

(3)　③より，$\sqrt{{p_n}^2 - 4q_n} = \sqrt{n}\,(n+1)$ となり，${p_n}^2 - 4q_n = n(n+1)^2$ ………④

そこで，$p_n = n\sqrt{n}$ のとき，${p_n}^2 = n^3$ となり，④より，

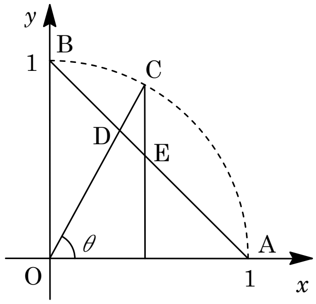
$$q_n = \frac{1}{4}\{n^3 - n(n+1)^2\} = -\frac{1}{4}n(2n+1)$$

［解　説］

2 次方程式の解を題材とした，誘導つきの漸化式の問題です。(2)の漸化式 $c_{n+1} = f(n)c_n$ を解くことがポイントとなっています。詳しくは「ピンポイントレクチャー」を参照してください。

3

問題のページへ



(1)　条件より，$0° < \theta < 90°$ として，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (\cos\theta,\ \sin\theta)$

とおくことができるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (\cos\theta)\vec{a} + (\sin\theta)\vec{b}$$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \cos\theta = t$ より $\sin\theta = \sqrt{1-t^2}$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = t\vec{a} + \sqrt{1-t^2}\,\vec{b}$$

(2)　点Dは線分OC上より，$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = k\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = kt\vec{a} + k\sqrt{1-t^2}\,\vec{b}$$

さらに，点Dは線分AB上にあることより，$kt + k\sqrt{1-t^2} = 1$

よって，$k = \dfrac{1}{t+\sqrt{1-t^2}}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \dfrac{t}{t+\sqrt{1-t^2}}\vec{a} + \dfrac{\sqrt{1-t^2}}{t+\sqrt{1-t^2}}\vec{b}$

(3)　OB//CEより，△OBDと△CDEは相似となり，相似比は，

$$\mathrm{OD} : \mathrm{CD} = k : (1-k) = \frac{1}{t+\sqrt{1-t^2}} : \left(1 - \frac{1}{t+\sqrt{1-t^2}}\right) = 1 : \left(t - 1 + \sqrt{1-t^2}\right)$$

これより，$\triangle\mathrm{CDE} = \left(t-1+\sqrt{1-t^2}\right)^2 \triangle\mathrm{OBD}$ となる。

また，(2)から，$\triangle\mathrm{OBD} = \dfrac{1}{2}\cdot 1 \cdot \dfrac{t}{t+\sqrt{1-t^2}} = \dfrac{t}{2\left(t+\sqrt{1-t^2}\right)}$ なので，△OBDと

△CDEの面積の和 S は，

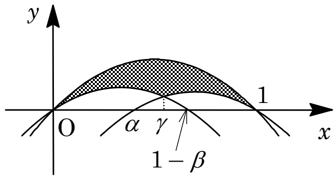
$$S = \frac{t}{2\left(t+\sqrt{1-t^2}\right)}\left\{1 + \left(t-1+\sqrt{1-t^2}\right)^2\right\}$$

［解　説］

平面ベクトルの基本問題です。ただ，結論の式の形が………。

4

問題のページへ



(1)　$\alpha>0$，$\beta>0$，$\alpha+\beta<1$ のとき，$C_1: y=x(1-x)$，$C_2: y=x(1-\beta-x)$，$C_3: y=(x-\alpha)(1-x)$ に対して，C_2 と C_3 の式を連立すると，

$$x(1-\beta-x)=(x-\alpha)(1-x)$$
$$(1-\beta)x=-\alpha+(\alpha+1)x$$

よって，$(\alpha+\beta)x=\alpha$ より $x=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$ となり，$\gamma=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$

(2)　C_1，C_2，C_3 で囲まれた図形の面積 S は，

$$S=\int_0^{\gamma}\{x(1-x)-x(1-\beta-x)\}dx+\int_{\gamma}^{1}\{x(1-x)-(x-\alpha)(1-x)\}dx$$
$$=\int_0^{\gamma}\beta x\,dx-\int_{\gamma}^{1}\alpha(x-1)\,dx=\frac{\beta}{2}\Big[x^2\Big]_0^{\gamma}-\frac{\alpha}{2}\Big[(x-1)^2\Big]_{\gamma}^{1}$$
$$=\frac{\beta}{2}\gamma^2+\frac{\alpha}{2}(\gamma-1)^2=\frac{\alpha+\beta}{2}\gamma^2-\alpha\gamma+\frac{\alpha}{2}$$
$$=\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2}-\alpha\cdot\frac{\alpha}{\alpha+\beta}+\frac{\alpha}{2}=-\frac{\alpha^2}{2(\alpha+\beta)}+\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha\beta}{2(\alpha+\beta)}$$

(3)　$\alpha+\beta=\dfrac{1}{4}$ のとき，(2)から，$S=2\alpha\beta$

ここで，相加平均と相乗平均の関係から，$\sqrt{\alpha\beta}\leqq\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ となり，

$$\alpha\beta\leqq\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{8}\right)^2=\frac{1}{64}$$

等号は $\alpha=\beta=\dfrac{1}{8}$ のときに成立する。

よって，S の最大値は $2\cdot\dfrac{1}{64}=\dfrac{1}{32}$ である。

［解　説］

定積分と面積に関する基本問題です。(3)については，1 文字を消去して計算を進めても構いません。

5

問題のページへ

(1)　n 回パスしたとき，B がボールを持っている確率を p_n とすると，条件より，

$$p_{n+1}=\frac{1}{4}(1-p_n)\cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，最初，A がボールを持っていたので，1 回パスしたとき，B がボールを持っている確率 p_1 は，$p_1=\frac{1}{4}$ である。

$(*)$より，$p_2=\frac{1}{4}(1-p_1)=\frac{3}{16}$，$p_3=\frac{1}{4}(1-p_2)=\frac{13}{64}$，$p_4=\frac{1}{4}(1-p_3)=\frac{51}{256}$

(2)　$(*)$を変形すると，$p_{n+1}-\frac{1}{5}=-\frac{1}{4}\left(p_n-\frac{1}{5}\right)$となり，

$$p_n-\frac{1}{5}=\left(p_1-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{1}{20}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}=-\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n}$$

よって，$p_n=\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n}$ である。

［解 説］

確率と漸化式の基本問題です。簡単に漸化式が求まりますので，(1)もその結果を利用しています。