1

解答解説のページへ

座標平面上の点 P(1, 1) を中心とし，原点 O を通る円を C_1 とする。k を正の定数として，曲線 $y=\dfrac{k}{x}\ (x>0)$ を C_2 とする。C_1 と C_2 は 2 点で交わるとし，その交点を Q, R とするとき，直線 PQ は x 軸に平行であるとする。点 Q の x 座標を q とし，点 R の x 座標を r とする。次の問いに答えよ。

(1) $k,\ q,\ r$ の値を求めよ。

(2) 曲線 C_2 と線分 OQ, OR で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(3) $x=1+\sqrt{2}\sin\theta$ とおくことにより，定積分 $\displaystyle\int_r^q \sqrt{2-(x-1)^2}\,dx$ の値を求めよ。

(4) 円 C_1 の原点 O を含まない弧 QR と曲線 C_2 で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

2

解答解説のページへ

座標平面上の放物線 $C_n : y = x^2 - p_n x + q_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を考える。ただし，p_n，q_n は，$p_1^{\ 2} - 4q_1 = 4$，$p_n^{\ 2} - 4q_n > 0 \quad (n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ を満たす実数とする。C_n と x 軸との 2 つの交点を結ぶ線分の長さを l_n とする。また，C_n と x 軸で囲まれた部分の面積 S_n は，

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \left(\frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}\right)^3 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1)　C_n の頂点の y 座標を l_n を用いて表せ。

(2)　数列 $\{l_n\}$ の一般項を求めよ。

(3)　$p_n = n\sqrt{n} \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ であるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\log\left(-\frac{2q_n}{n^2}\right)$ を求めよ。ただし，$\log x$ は x の自然対数である。

3　　解答解説のページへ

座標空間内に 5 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}\left(0,\ 0,\ \dfrac{3}{4}\right)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{2},\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\mathrm{C}(s,\ t,\ 0)$，$\mathrm{D}(0,\ u,\ 0)$ がある。ただし, s, t, u は実数で，$s>0$，$t>0$，$s+t=1$ を満たすとする。3 点 A, B, C の定める平面が y 軸と点 D で交わっているとき，次の問いに答えよ。

(1) 直線 AB と x 軸との交点の x 座標を求めよ。

(2) u を t を用いて表せ。また，$0<u<1$ であることを示せ。

(3) 点 $(0,\ 1,\ 0)$ を E とする。点 D が線分 OE を $12:1$ に内分するとき，t の値を求めよ。

4

解答解説のページへ

a, b, p は $a>0$，$b>0$，$p<0$ を満たす実数とする。座標平面上の 2 曲線

$$C_1 : y = e^x,\quad C_2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

を考える。ただし，e は自然対数の底である。C_1 と C_2 が点 $(p,\ e^p)$ を共有し，その点における C_1 の接線と C_2 の接線が一致するとき，次の問いに答えよ。

(1) p を a を用いて表せ。

(2) $\displaystyle\lim_{a\to\infty}(p+a)$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{b^2e^{2a}}{a}$ を求めよ。

5

解答解説のページへ

m, n を自然数とする。次の問いに答えよ。

(1)　$m\geqq 2$，$n\geqq 2$ とする。異なる m 種類の文字から重複を許して n 個を選び，1 列に並べる。このとき，ちょうど 2 種類の文字を含む文字列は何通りあるか求めよ。

(2)　$n\geqq 3$ とする。3 種類の文字 a, b, c から重複を許して n 個を選び，1 列に並べる。このとき a, b, c すべての文字を含む文字列は何通りあるか求めよ。

(3)　$n\geqq 3$ とする。n 人を最大 3 組までグループ分けする。このときできたグループ数が 2 である確率 p_n を求めよ。ただし，どのグループ分けも同様に確からしいとする。たとえば，$n=3$ のとき，A, B, C の 3 人をグループ分けする方法は，

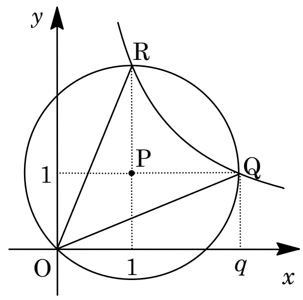
$$\{(\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C})\},\ \{(\mathrm{A},\ \mathrm{B}),\ (\mathrm{C})\},\ \{(\mathrm{A},\ \mathrm{C}),\ (\mathrm{B})\},$$
$$\{(\mathrm{B},\ \mathrm{C}),\ (\mathrm{A})\},\ \{(\mathrm{A}),\ (\mathrm{B}),\ (\mathrm{C})\}$$

の 5 通りであるので，$p_3=\dfrac{3}{5}$ である。

(4)　(3)の確率 p_n が $\dfrac{1}{3}$ 以下となるような n の値の範囲を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　円 C_1 は中心 $\mathrm{P}(1,\ 1)$，半径は $\sqrt{2}$ から，

$$C_1 : (x-1)^2+(y-1)^2=2 \cdots\cdots\cdots ①$$

また，C_1 と $C_2 : y=\dfrac{k}{x}\ (x>0) \cdots\cdots ②$ は点 Q，R で交わり，PQ は x 軸に平行であることより，$\mathrm{Q}(1+\sqrt{2},\ 1)$ となる。これより，$q=1+\sqrt{2}$ である。そして，C_2 が点 Q を通ることより，②から $k=(1+\sqrt{2})\cdot 1=1+\sqrt{2}$ である。

さらに，C_1，C_2 がともに直線 $y=x$ について対称なので $\mathrm{R}(1,\ 1+\sqrt{2})$ となり，$r=1$ である。

(2)　C_2 と線分 OQ, OR で囲まれた部分の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1+\sqrt{2})+\int_1^{1+\sqrt{2}}\frac{1+\sqrt{2}}{x}dx-\frac{1}{2}\cdot(1+\sqrt{2})\cdot 1$$
$$=(1+\sqrt{2})\Big[\log x\Big]_1^{1+\sqrt{2}}=(1+\sqrt{2})\log(1+\sqrt{2})$$

(3)　$I=\displaystyle\int_r^q\sqrt{2-(x-1)^2}\,dx$ に対して，$x=1+\sqrt{2}\sin\theta$ とおくと，

$$I=\int_1^{1+\sqrt{2}}\sqrt{2-(x-1)^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2-2\sin^2\theta}\cdot\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta=\Big[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

(4)　円 C_1 の $y\geqq 1$ の部分は，①より $y=1+\sqrt{2-(x-1)^2}$ となる。

すると，求める回転体の体積 V は，

$$V=\pi\int_1^{1+\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{2-(x-1)^2}\right)^2dx-\pi\int_1^{1+\sqrt{2}}\frac{(1+\sqrt{2})^2}{x^2}dx$$
$$=\pi\int_1^{1+\sqrt{2}}\left\{3-(x-1)^2+2\sqrt{2-(x-1)^2}\right\}dx-(1+\sqrt{2})^2\pi\int_1^{1+\sqrt{2}}\frac{1}{x^2}dx$$
$$=\pi\Big[3x-\frac{1}{3}(x-1)^3\Big]_1^{1+\sqrt{2}}+2\pi I-(1+\sqrt{2})^2\pi\Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^{1+\sqrt{2}}$$
$$=\Big(3\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{2}}{3}\Big)\pi+2\pi\cdot\frac{\pi}{2}-(1+\sqrt{2})^2\Big(-\frac{1}{1+\sqrt{2}}+1\Big)\pi$$
$$=\frac{7\sqrt{2}}{3}\pi+\pi^2-\sqrt{2}(1+\sqrt{2})\pi=\Big(\frac{4\sqrt{2}}{3}-2\Big)\pi+\pi^2$$

［解　説］

定積分による求積問題です。誘導つきで計算量も標準的です。なお，(2)はよく見かけるものです。

2

問題のページへ

(1)　$C_n : y = x^2 - p_n x + q_n$ と x 軸の交点は，$p_n{}^2 - 4q_n > 0$ から $x = \dfrac{p_n \pm \sqrt{p_n{}^2 - 4q_n}}{2}$ となり，これを $x = \alpha_n$，β_n $(\alpha_n < \beta_n)$ とおくと，

$$l_n = \beta_n - \alpha_n = \sqrt{p_n{}^2 - 4q_n} \cdots\cdots\cdots ①$$

また，$C_n : y = \left(x - \dfrac{p_n}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}(p_n{}^2 - 4q_n)$ より，頂点の y 座標は $-\dfrac{1}{4}(p_n{}^2 - 4q_n)$ となり，①から $-\dfrac{1}{4}l_n{}^2$ と表せる。

(2)　C_n と x 軸で囲まれた部分の面積 S_n は，

$$S_n = \int_{\alpha_n}^{\beta_n} -(x^2 - p_n x + q_n)\,dx = -\int_{\alpha_n}^{\beta_n}(x - \alpha_n)(x - \beta_n)\,dx = \frac{1}{6}(\beta_n - \alpha_n)^3$$

①より，$S_n = \dfrac{1}{6}l_n{}^3$ となり，条件 $\dfrac{S_{n+1}}{S_n} = \left(\dfrac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}\right)^3$ に代入すると，

$$\frac{l_{n+1}{}^3}{l_n{}^3} = \left(\frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}\right)^3,\quad \frac{l_{n+1}}{l_n} = \frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}} \cdots\cdots\cdots ②$$

ここで，$f(n) = \dfrac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}$ とおくと，②から $l_{n+1} = f(n)l_n$ となり，

$$l_n = l_1 f(1)f(2)f(3)\cdots\cdots f(n-1)\quad (n \geqq 2)$$

よって，$l_1 = \sqrt{p_1{}^2 - 4q_1} = \sqrt{4} = 2$ から，

$$l_n = 2\cdot\frac{3}{\sqrt{1\cdot 2}}\cdot\frac{4}{\sqrt{2\cdot 3}}\cdot\frac{5}{\sqrt{3\cdot 4}}\cdots\cdots\frac{n+1}{\sqrt{(n-1)n}} = 2\cdot\frac{n(n+1)}{2\sqrt{n}} = \sqrt{n}\,(n+1)$$

この式は，$n = 1$ のときも成立する。

(3)　(1)(2)より，$\sqrt{p_n{}^2 - 4q_n} = \sqrt{n}\,(n+1)$ となり，$p_n{}^2 - 4q_n = n(n+1)^2 \cdots\cdots\cdots ③$

そこで，$p_n = n\sqrt{n}$ のとき，$p_n{}^2 = n^3$ となり，③より，

$$q_n = \frac{1}{4}\{n^3 - n(n+1)^2\} = -\frac{1}{4}n(2n+1)$$

これより，$\log\left(-\dfrac{2q_n}{n^2}\right) = \log\dfrac{2n+1}{2n}$ となり，

$$\lim_{n\to\infty} n\log\left(-\frac{2q_n}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} n\log\frac{2n+1}{2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} = \frac{1}{2}\log e = \frac{1}{2}$$

［解　説］

漸化式と極限を題材にした標準的な問題です。一部，文系と重なる部分があります。

3

問題のページへ

(1)　点$\mathrm{A}\left(0,\ 0,\ \dfrac{3}{4}\right)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{2},\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right)$に対して，直線 AB と x 軸との交点を$\mathrm{P}(v,\ 0,\ 0)$とおくと，k を実数として，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となり，

$$\left(v,\ 0,\ -\frac{3}{4}\right)=k\left(\frac{1}{2},\ 0,\ -\frac{1}{4}\right)$$

すると，$-\dfrac{3}{4}=-\dfrac{1}{4}k$ より $k=3$ となり，$v=3\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$ である。

(2)　3 点 A, B, C の定める平面と，3 点 A, P, C の定める平面は一致し，この平面と y 軸との交点 D は，l を実数として，$\overrightarrow{\mathrm{PD}}=l\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ と表せる。

そこで，(1)から$\mathrm{P}\left(\dfrac{3}{2},\ 0,\ 0\right)$，また$s=1-t>0$として$\mathrm{C}(1-t,\ t,\ 0)$となるので，

$$\left(-\frac{3}{2},\ u,\ 0\right)=l\left(-\frac{1}{2}-t,\ t,\ 0\right)$$

すると，$-\dfrac{3}{2}=l\left(-\dfrac{1}{2}-t\right)$ より $l=\dfrac{3}{2t+1}$ となり，$u=\dfrac{3t}{2t+1}$ ………(＊)

そこで，(＊)より $u=\dfrac{3}{2}\left(1-\dfrac{1}{2t+1}\right)$ となり，$0<t<1$ のとき，

$$\frac{1}{3}<\frac{1}{2t+1}<1,\ \ 0<1-\frac{1}{2t+1}<\frac{2}{3}$$

これより，$0<u<1$ である。

(3)　点$\mathrm{E}(0,\ 1,\ 0)$に対し，点 D が線分 OE を$12:1$に内分するとき$u=\dfrac{12}{13}$であり，

$$\frac{3t}{2t+1}=\frac{12}{13},\ \ 39t=24t+12$$

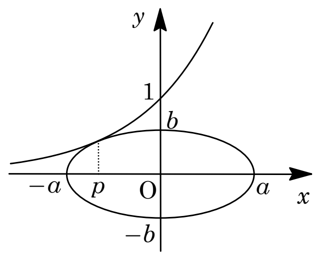
よって，$t=\dfrac{4}{5}$ となる。

［解　説］

空間座標についての計算問題です。ただ，それだけです。

4

問題のページへ



(1)　$C_1 : y=e^x \cdots\cdots$①，$C_2 : \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \cdots\cdots$②に対して，

まず，C_2 が点$(p,\ e^p)$を通るので，②より，

$$\frac{p^2}{a^2}+\frac{e^{2p}}{b^2}=1,\ b^2p^2+a^2e^{2p}=a^2b^2 \cdots\cdots\cdots ③$$

また，①より $y'=e^x$ となり，点$(p,\ e^p)$における C_1 の接線の方向ベクトル $\overrightarrow{u_1}$ は，$\overrightarrow{u_1}=(1,\ e^p)$ である。

そして，C_2 の点$(p,\ e^p)$における接線は $\dfrac{px}{a^2}+\dfrac{e^p y}{b^2}=1$ と表せ，この法線ベクトル $\overrightarrow{n_2}$ は $\overrightarrow{n_2}=\left(\dfrac{p}{a^2},\ \dfrac{e^p}{b^2}\right)=\dfrac{1}{a^2b^2}(b^2p,\ a^2e^p)$ となる。

すると，$\overrightarrow{u_1}\perp\overrightarrow{n_2}$ より，$b^2p+a^2e^{2p}=0 \cdots\cdots\cdots ④$

③④より，$b^2p^2-b^2p=a^2b^2$，$p^2-p-a^2=0$ となり，$p<0$ より，

$$p=\frac{1-\sqrt{1+4a^2}}{2}$$

(2)　$$p+a=\frac{1-\sqrt{1+4a^2}}{2}+a=\frac{2a+1-\sqrt{1+4a^2}}{2}=\frac{(2a+1)^2-(1+4a^2)}{2\left(2a+1+\sqrt{1+4a^2}\right)}$$

$$=\frac{2a}{2a+1+\sqrt{1+4a^2}}=\frac{2}{2+\dfrac{1}{a}+\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+4}}$$

よって，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}(p+a)=\frac{2}{2+\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$

(3)　④より，$b^2=-\dfrac{a^2e^{2p}}{p}$ となるので，

$$\frac{b^2e^{2a}}{a}=-\frac{a^2e^{2p}e^{2a}}{ap}=-\frac{ae^{2(p+a)}}{p}=\frac{2a}{\sqrt{1+4a^2}-1}\cdot e^{2(p+a)}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+4}-\dfrac{1}{a}}\cdot e^{2(p+a)}$$

(2)の結果を用いると，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{b^2e^{2a}}{a}=\frac{2}{\sqrt{4}}e^{2\cdot\frac{1}{2}}=e$

［解　説］

2 曲線が接する条件をもとに，極限と絡めたものです。本問も誘導がていねいです。

5

問題のページへ

(1)　異なる m 種類の文字から 2 種類の文字を選ぶ方法は，${}_m\mathrm{C}_2=\dfrac{m(m-1)}{2}$ 通り。

そして，この文字から重複を許して n 個を選び 1 列に並べるのは，2^n 通り。この中で，2 種類の文字を含むのは, 1 種類が 2 通りあるので，2^n-2 通りである。

よって，求める場合は，$\dfrac{m(m-1)}{2}(2^n-2)=m(m-1)(2^{n-1}-1)$ 通りである。

(2)　3 種類の文字から重複を許して n 個を選び 1 列に並べるのは，3^n 通り。

この中で，1 種類となるのは 3 通り，2 種類となるのは ${}_3\mathrm{C}_2(2^n-2)=3(2^n-2)$ 通りなので, 3 種類の文字を含む方法は,

$$3^n-3-3(2^n-2)=3^n-3\cdot2^n+3 \quad (\text{通り})$$

(3)　(i)　n 人を 1 組にグループ分けするとき　明らかに 1 通り。

(ii)　n 人を 2 組にグループ分けするとき

2 組のグループを区別したとき，その分け方は，2 種類の文字を 1 列に並べ，2 種類とも含む場合に一致するので，(1)から 2^n-2 通りとなる。これより，グループを区別しないときは，$\dfrac{2^n-2}{2!}=2^{n-1}-1$ 通りである。

(iii) n 人を 3 組にグループ分けするとき

3 組のグループを区別したとき，その分け方は，3 種類の文字を 1 列に並べ，3 種類とも含む場合に一致するので，(2)から $3^n-3\cdot2^n+3$ 通りとなる。そして，グループを区別しないときは，$\dfrac{3^n-3\cdot2^n+3}{3!}=\dfrac{3^{n-1}-2^n+1}{2}$ 通りである。

(i)～(iii)より, n 人を最大 3 組までグループ分けする方法は,

$$1+(2^{n-1}-1)+\frac{3^{n-1}-2^n+1}{2}=\frac{3^{n-1}+1}{2} \quad (\text{通り})$$

すると，このときグループ数が 2 である確率 p_n は，$p_n=\dfrac{2(2^{n-1}-1)}{3^{n-1}+1}=\dfrac{2^n-2}{3^{n-1}+1}$

(4)　$p_n\leqq\dfrac{1}{3}$ のとき，$\dfrac{2^n-2}{3^{n-1}+1}\leqq\dfrac{1}{3}$ となり，$3^{n-1}-3\cdot2^n+7\geqq0$ ………(＊)

ここで，$f(n)=3^{n-1}-3\cdot2^n+7=3^{n-1}-6\cdot2^{n-1}+7$ とおくと,

$$f(3)=-8<0,\ f(4)=-14<0,\ f(5)=-8<0,\ f(6)=58>0$$

さて，$n\geqq6$ において，$\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}\geqq\left(\dfrac{3}{2}\right)^5=\dfrac{243}{32}>6$ より，$f(n)>7>0$ である。

よって，(＊)が成り立つ n の値の範囲は，$n\geqq6$ である。

［解 説］

ポイントは, (1)(2)が(3)の誘導となっていることです。樹形図で要確認。