1

解答解説のページへ

a を正の定数とし，座標平面上において，

円 $C_1 : x^2 + y^2 = 1$，放物線 $C_2 : y = ax^2 + 1$

を考える。C_1 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ における C_1 の接線 l は点 $\mathrm{Q}(s,\ t)$ で C_2 に接している。次の問いに答えよ。

(1) s, t および a を求めよ。

(2) C_2, l および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

(3) 円 C_1 上の点が点 P から点 $\mathrm{R}(0,\ 1)$ まで反時計回りに動いてできる円弧を C_3 とする。C_2, l および C_3 で囲まれた部分の面積を求めよ。

2

解答解説のページへ

四角形 ABCD において，$\angle \mathrm{DAB} = \angle \mathrm{DBC} = 90^\circ$，$\angle \mathrm{BCD} = 60^\circ$，$\mathrm{AB} = \mathrm{AD}$，$\mathrm{BC} = 1$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 対角線 BD の長さの 2 乗 BD^2 を求めよ。

(2) 対角線 AC の長さの 2 乗 AC^2 を求めよ。

(3) $\angle \mathrm{BAC} = \alpha$，$\angle \mathrm{ACD} = \beta$ とおくとき，$\cos^2\alpha$，$\cos^2\beta$ を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

座標空間に 4 点 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(s,\ s,\ s)$，B$(-1,\ 1,\ 1)$，C$(0,\ 0,\ 1)$ がある。ただし，$s>0$ とする。$t,\ u,\ v$ を実数とし，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-t\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{e}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-u\overrightarrow{\mathrm{OA}}-v\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{d}$ のとき，t を s を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{e}$，$\vec{d}\perp\vec{e}$ のとき，$u,\ v$ を s を用いて表せ。

(3) (2)のとき，2 点 D，E を，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\vec{e}$ となる点とする。四面体 OADE の体積が 2 であるとき，s の値を求めよ。

4

解答解説のページへ

xy 平面上に原点を出発点として動く点 Q があり，次の試行を行う。

1 枚の硬貨を投げ，表が出たら Q は x 軸の正の方向に 1，裏が出たら y 軸の正の方向に 1 動く。ただし，点$(3,\ 1)$に到達したら Q は原点に戻る。

この試行を n 回繰り返した後の Q の座標を$(x_n,\ y_n)$とする。次の問いに答えよ。

(1) $(x_4,\ y_4)=(0,\ 0)$ となる確率を求めよ。

(2) $(x_8,\ y_8)=(5,\ 3)$ となる確率を求めよ。

(3) $x_8+y_8\leqq 4$ となる確率を求めよ。

(4) $x_{4n}+y_{4n}\leqq 4k$ となる確率を n と k で表せ。ここで k は n 以下の自然数とする。

5

解答解説のページへ

n を 2 以上の自然数とする。次の問いに答えよ。

(1)　変量 x のデータの値が x_1，x_2，…，x_n であるとし，$f(a)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2$ とする。$f(a)$ を最小にする a は x_1，x_2，…，x_n の平均値で，そのときの最小値は x_1，x_2，…，x_n の分散であることを示せ。

(2)　c を定数として，変量 y, z の k 番目のデータの値が

$$y_k=k\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n),\quad z_k=ck\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

であるとする。このとき y_1，y_2，…，y_n の分散が z_1，z_2，…，z_n の分散より大きくなるための c の必要十分条件を求めよ。

(3)　変量 x のデータの値が x_1，x_2，…，x_n であるとし，その平均値を $\overline{x}$ とする。新たにデータを得たとし，その値を x_{n+1} とする。x_1，x_2，…，x_n，x_{n+1} の平均値を x_{n+1}，$\overline{x}$ および n を用いて表せ。

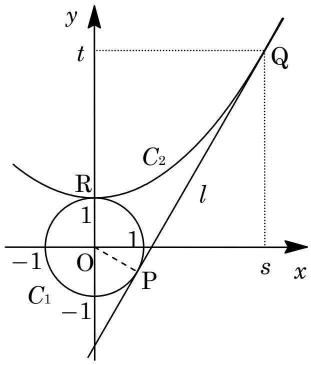
(4)　次の 40 個のデータの平均値，分散，中央値を計算すると，それぞれ，ちょうど 40, 670, 35 であった。

120	10	60	70	30	20	20	30	20	60
40	50	40	10	30	40	40	30	20	70
100	20	20	40	40	60	70	20	50	10
30	10	50	80	10	30	70	10	60	10

新たにデータを得たとし，その値が 40 であった。このとき，41 個のすべてのデータの平均値，分散，中央値を求めよ。ただし，得られた値が整数でない場合は，小数第 1 位を四捨五入せよ。

1

問題のページへ



(1)　$C_1 : x^2+y^2=1$ 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ における C_1 の接線 l の方程式は,

$$l : \frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y=1,\ \ y=\sqrt{3}x-2\cdots\cdots\cdots①$$

$C_2 : y=ax^2+1$ と①を連立すると,

$$ax^2+1=\sqrt{3}x-2,\ \ ax^2-\sqrt{3}x+3=0\cdots\cdots\cdots②$$

l と C_2 が接することより, $D=3-12a=0$, $a=\dfrac{1}{4}$

このとき, ②の重解は $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2a}=2\sqrt{3}$

よって, 接点 Q の x 座標 $s=2\sqrt{3}$ となり, ①から $t=\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}-2=4$ である。

(2)　C_2, l および y 軸で囲まれた部分の面積 S は,

$$S=\int_0^{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{4}x^2+1-\sqrt{3}x+2\right)dx=\int_0^{2\sqrt{3}}\frac{1}{4}(x-2\sqrt{3})^2dx$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{(x-2\sqrt{3})^3}{3}\right]_0^{2\sqrt{3}}=\frac{1}{12}\cdot 24\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

(3)　C_2, l および C_3 で囲まれた部分の面積 T は, $\angle\mathrm{POR}=\dfrac{2}{3}\pi$, l の y 切片が -2 から,

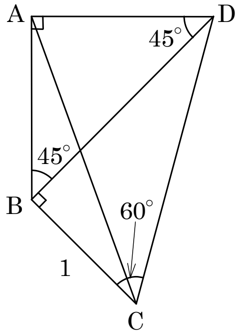
$$T=S-\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$$

［解　説］

円と放物線の関係を題材にした面積に関する基本題です。

$\boxed{2}$

問題のページへ



(1)　直角三角形 BCD において,

$$BD = BC\tan 60^\circ = \sqrt{3}\,,\ \ BD^2 = 3$$

(2)　直角二等辺三角形 ABD において,

$$AB = AD = BD\cos 45^\circ = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$\angle ABC = 135^\circ$ から, $\triangle ABC$ に余弦定理を適用すると,

$$AC^2 = \frac{3}{2} + 1 - 2\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot 1\cdot\cos 135^\circ = \frac{5}{2} + \sqrt{3}$$

(3)　条件より, $\angle BAC = \alpha$, $\angle ACD = \beta$ とおく。

まず, $\triangle ABC$ に余弦定理を適用すると,

$$1 = \frac{3}{2} + \left(\frac{5}{2} + \sqrt{3}\right) - 2\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{\frac{5}{2} + \sqrt{3}}\cos\alpha\,,\ \ 3 + \sqrt{3} - \sqrt{3}\cdot\sqrt{5 + 2\sqrt{3}}\cos\alpha = 0$$

よって, $\cos\alpha = \dfrac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5 + 2\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{5 + 2\sqrt{3}}}$ となり,

$$\cos^2\alpha = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{5 + 2\sqrt{3}} = \frac{(4 + 2\sqrt{3})(5 - 2\sqrt{3})}{25 - 12} = \frac{8 + 2\sqrt{3}}{13}$$

次に, $CD = 2$ から, $\triangle ACD$ に余弦定理を適用すると,

$$\frac{3}{2} = \left(\frac{5}{2} + \sqrt{3}\right) + 4 - 2\sqrt{\frac{5}{2} + \sqrt{3}}\cdot 2\cos\beta\,,\ \ 5 + \sqrt{3} - 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{5 + 2\sqrt{3}}\cos\beta = 0$$

よって, $\cos\beta = \dfrac{5 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{5 + 2\sqrt{3}}}$ となり,

$$\cos^2\beta = \frac{28 + 10\sqrt{3}}{8(5 + 2\sqrt{3})} = \frac{1}{4}\cdot\frac{(14 + 5\sqrt{3})(5 - 2\sqrt{3})}{25 - 12} = \frac{40 - 3\sqrt{3}}{52}$$

［解　説］

三角比の図形への適用問題です。内容は基本事項の確認です。

3

問題のページへ

(1) $s>0$ で，O(0, 0, 0)，A$(s,\ s,\ s)$，B$(-1,\ 1,\ 1)$，C$(0,\ 0,\ 1)$ に対して，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\sqrt{s^2+s^2+s^2}=\sqrt{3}s,\ |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3},\ |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-s+s+s=s,\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s,\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=1$$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{d}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-t\overrightarrow{\mathrm{OA}})=0$ となり，

$$s-3s^2t=0,\ t=\frac{1}{3s}\cdots\cdots\cdots①$$

(2) まず，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{e}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\vec{e}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-u\overrightarrow{\mathrm{OA}}-v\overrightarrow{\mathrm{OB}})=0$ となり，

$$s-3s^2u-sv=0,\ 1-3su-v=0\cdots\cdots\cdots②$$

また，$\vec{d}\perp\vec{e}$ より，$\vec{d}\cdot\vec{e}=(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-t\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-u\overrightarrow{\mathrm{OA}}-v\overrightarrow{\mathrm{OB}})=0$ となり，

$$1-su-3v-st+3s^2tu+stv=0\cdots\cdots\cdots③$$

①③より，$1-su-3v-\dfrac{1}{3}+su+\dfrac{1}{3}v=0$，$\dfrac{2}{3}-\dfrac{8}{3}v=0$，$v=\dfrac{1}{4}\cdots\cdots\cdots④$

②④より，$\dfrac{3}{4}-3su=0$，$u=\dfrac{1}{4s}\cdots\cdots\cdots⑤$

(3) ①より，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}=(-1,\ 1,\ 1)-\dfrac{1}{3s}(s,\ s,\ s)=\dfrac{2}{3}(-2,\ 1,\ 1)$

④⑤より，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\vec{e}=(0,\ 0,\ 1)-\dfrac{1}{4s}(s,\ s,\ s)-\dfrac{1}{4}(-1,\ 1,\ 1)=\dfrac{1}{2}(0,\ -1,\ 1)$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ より△ODE は直角三角形となり，また $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ より OA は△ODE に垂直である。これより，四面体 OADE の体積 V は，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{OD}\cdot\mathrm{OE}\cdot\mathrm{OA}=\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{4+1+1}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{3}s=\frac{s}{3}$$

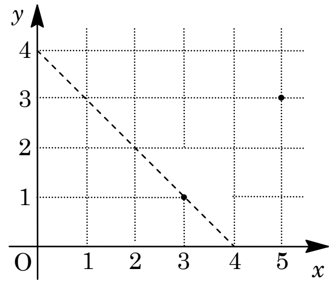
よって，条件から $V=2$ なので，$\dfrac{s}{3}=2$ すなわち $s=6$ である。

［解 説］

空間ベクトルの基本的な問題です。成分表示して計算していくと，スムーズに結論まで導けます。

4

問題のページへ



(1) 原点から出発した点 Q は, 表が出たら x 軸の正の方向に 1, 裏が出たら y 軸の正の方向に 1 動く。そして, この試行を n 回繰り返したとき, その到達点$(x_n,\ y_n)$は, 点 (3, 1) を通らないときは線分 $x+y=n$ $(x\geqq 0,\ y\geqq 0)$ 上の点, また点(3, 1)を通るといったん原点に戻り, 続けて残りの試行を繰り返す。

さて, $(x_4,\ y_4)=(0,\ 0)$ となるのは, 4 回目の試行で点(3, 1)に到達したときより, その確率は, ${}_4\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\dfrac{1}{2}=4\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{1}{4}$ である。

(2) $(x_8,\ y_8)=(5,\ 3)$ となるのは, 8 回目の試行で点(5, 3)に到達し, しかも 4 回目の試行では点(3, 1)を通らないときより, その確率は, (1)を利用すると,

$$ {}_8\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^3-\frac{1}{4}\cdot{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=56\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^8-\frac{1}{4}\cdot 6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{8} $$

(3) 試行を 8 回行い, 4 回目の試行で点(3, 1)を通らないときは $x_8+y_8=8$ となる。

また, 4 回目の試行で点(3, 1)を到達し原点に戻った後, 8 回目の試行で点(3, 1)に到達しないときは $x_8+y_8=4$ となり, 8 回目の試行で点(3, 1)に到達するときは $(x_8,\ y_8)=(0,\ 0)$ である。

したがって, $x_8+y_8\leqq 4$ となるのは 4 回目の試行で点(3, 1)に到達するときであり, その確率は, (1)から $\dfrac{1}{4}$ である。

(4) 試行を $4n$ 回行うとき, 到達点$(x_{4n},\ y_{4n})$を考える。

まず, 4 回目の試行で点(3, 1)を通らないときは, つねに $x_{4n}+y_{4n}=4n$ となる。

次に, 4 回目の試行で点(3, 1)に到達し原点に戻った後, 試行を続けるときは $x_{4n}+y_{4n}\leqq 4(n-1)$ となり, その確率は $\dfrac{1}{4}$ である。

さらに, 4 回目と 8 回目に点(3, 1)に到達し原点に 2 回戻った後, 試行を続けるときは $x_{4n}+y_{4n}\leqq 4(n-2)$ となり, その確率は $\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1}{16}$ である。

同様に考えて, l を整数$(0\leqq l\leqq n-1)$とし, 4 回目, 8 回目, …, $4l$ 回目に点(3, 1)に到達し原点に l 回戻った後, 試行を続けるときは $x_{4n}+y_{4n}\leqq 4(n-l)$ となり, その確率は $\left(\dfrac{1}{4}\right)^l$ である。そこで, $k=n-l$ とおくと $1\leqq k\leqq n$ となり, $x_{4n}+y_{4n}\leqq 4k$ となる確率は $\left(\dfrac{1}{4}\right)^l=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-k}$ である。

［解　説］

確率の頻出問題ですが, 振り出しに戻るというひねりが加えられています。

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1)　x_1，x_2，…，x_n の平均値を $\overline{x}$，分散を s^2 とすると，

$$f(a)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{x_k}^2-2a\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k+a^2\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}1$$

$$=\overline{x^2}-2a\overline{x}+a^2=(a-\overline{x})^2+\overline{x^2}-(\overline{x})^2=(a-\overline{x})^2+s^2$$

よって，$f(a)$ は $a=\overline{x}$ のとき最小となり，最小値は s^2 である。

(2)　$z_k=cy_k$ で，y_1，y_2，…，y_n の平均を $\overline{y}$，z_1，z_2，…，z_n の平均を $\overline{z}$ とすると，

$$\overline{z}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}z_k=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}cy_k=c\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k=c\overline{y}$$

また，y_1，y_2，…，y_n の分散を ${s_y}^2$，z_1，z_2，…，z_n の分散を ${s_z}^2$ とすると，

$${s_z}^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{z_k}^2-(\overline{z})^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(cy_k)^2-(c\overline{y})^2=c^2\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{y_k}^2-c^2(\overline{y})^2=c^2{s_y}^2$$

条件 ${s_y}^2>{s_z}^2$ から，${s_y}^2>c^2{s_y}^2$ となり $c^2<1$，すなわち $-1<c<1$ である。

(3)　$\overline{x}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_k$ より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_k=n\overline{x}$ となり，x_1，x_2，…，x_n，x_{n+1} の平均値は，

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}x_k=\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n}x_k+x_{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}(n\overline{x}+x_{n+1})$$

(4)　与えられた 40 個のデータに，値 40 のデータを新たに加えたときを考える。

40 個のデータの平均値は 40 なので，41 個のデータの平均値は，

$$\frac{1}{41}(40\cdot 40+40)=40$$

40 個のデータの分散は 670 なので，41 個のデータの分散は，

$$\frac{1}{41}\{670\cdot 40+(40-40)^2\}\fallingdotseq 653.6\cdots$$

よって，小数第 1 位を四捨五入すると，654 である。

40 個のデータの中央値は，小さい方から 20 番目(30)と 21 番目(40)の平均値から 35 なので，41 個のデータの中央値は 21 番目より 40 である。

［解 説］

データの分析に関して，平均値や分散などの定義の確認問題です。