1

解答解説のページへ

座標空間に 4 点 O(0, 0, 0)，A(s, s, s)，B(-1, 1, 1)，C(0, 0, 1) がある。ただし，$s>0$ とする。t, u, v を実数とし，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-t\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{e}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-u\overrightarrow{\mathrm{OA}}-v\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{d}$ のとき，t を s を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{e}$，$\vec{d}\perp\vec{e}$ のとき，u, v を s を用いて表せ。

(3)　(2)のとき，2 点 D, E を，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\vec{e}$ となる点とする。四面体 OADE の体積が 2 であるとき，s の値を求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　a を正の定数とする。関数 $f(x)=\dfrac{e^x-ae^{-x}}{2}$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。

(2)　(1)で求めた $f^{-1}(x)$ の導関数を求めよ。

(3)　c を正の定数とする。x 軸，y 軸，直線 $x=c$ および曲線 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+c^2}}$ で囲まれる部分の面積を求めよ。

3

解答解説のページへ

複素数平面上を，点 P が次のように移動する。

1. 時刻 0 では，P は原点にいる。時刻 1 まで，P は実軸の正の方向に速さ 1 で移動する。移動後の P の位置を $Q_1(z_1)$ とすると，$z_1 = 1$ である。
2. 時刻 1 に P は $Q_1(z_1)$ において進行方向を $\dfrac{\pi}{4}$ 回転し，時刻 2 までその方向に速さ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で移動する。移動後の P の位置を $Q_2(z_2)$ とすると，$z_2 = \dfrac{3+i}{2}$ である。
3. 以下同様に，時刻 n に P は $Q_n(z_n)$ において進行方向を $\dfrac{\pi}{4}$ 回転し，時刻 $n+1$ までその方向に速さ $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ で移動する。移動後の P の位置を $Q_{n+1}(z_{n+1})$ とする。ただし n は自然数である。

$\alpha = \dfrac{1+i}{2}$ として，次の問いに答えよ。

(1)　z_3，z_4 を求めよ。

(2)　z_n を α, n を用いて表せ。

(3)　P が $Q_1(z_1)$，$Q_2(z_2)$，…と移動するとき，P はある点 $Q(w)$ に限りなく近づく。w を求めよ。

(4)　z_n の実部が(3)で求めた w の実部より大きくなるようなすべての n を求めよ。

4

解答解説のページへ

xy 平面上に原点を出発点として動く点 Q があり，次の試行を行う。

1 枚の硬貨を投げ，表が出たら Q は x 軸の正の方向に 1，裏が出たら y 軸の正の方向に 1 動く。ただし，点$(3,\ 1)$に到達したら Q は原点に戻る。

この試行を n 回繰り返した後の Q の座標を$(x_n,\ y_n)$とする。次の問いに答えよ。

(1)　$(x_4,\ y_4)=(0,\ 0)$ となる確率を求めよ。

(2)　$(x_8,\ y_8)=(5,\ 3)$ となる確率を求めよ。

(3)　$x_8+y_8 \leqq 4$ となる確率を求めよ。

(4)　$x_{4n}+y_{4n} \leqq 4k$ となる確率を n と k で表せ。ここで k は n 以下の自然数とする。

5

解答解説のページへ

数列 $x_n = 2^n$ $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ を考える。この数列は 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, $\cdots$ であるが，各項の下 1 桁をみると，1, 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, $\cdots$ となっており，2 から循環が始まり循環の周期は 4 である。次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{x_n\}$ の各項の下 2 桁は，あるところから循環する。循環が始まるところと，循環の周期を求めよ。ここで，1 桁の数に対しては 0 を補って下 2 桁とみなすとする。たとえば，2 の下 2 桁は 02 とする。

(2) 4 の倍数で，25 で割って 1 余る 2 桁の自然数 A を求めよ。

(3) 8 の倍数で，125 で割って 1 余る 3 桁の自然数 B を求めよ。

(4) 数列 $\{x_n\}$ の各項の下 3 桁は，あるところから循環する。循環が始まるところと，循環の周期を求めよ。ここで，2^m を 125 で割って 1 余るような最小の自然数 m が 100 であることを用いてもよい。

1

問題のページへ

(1)　$s>0$ で，$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(s,\ s,\ s)$，$\mathrm{B}(-1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$ に対して，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\sqrt{s^2+s^2+s^2}=\sqrt{3}s\,,\ |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}\,,\ |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-s+s+s=s\,,\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\,,\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=1$$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{d}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-t\overrightarrow{\mathrm{OA}})=0$ となり，

$$s-3s^2t=0\,,\ t=\frac{1}{3s}\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　まず，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{e}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\vec{e}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-u\overrightarrow{\mathrm{OA}}-v\overrightarrow{\mathrm{OB}})=0$ となり，

$$s-3s^2u-sv=0\,,\ 1-3su-v=0\cdots\cdots\cdots②$$

また，$\vec{d}\perp\vec{e}$ より，$\vec{d}\cdot\vec{e}=(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-t\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-u\overrightarrow{\mathrm{OA}}-v\overrightarrow{\mathrm{OB}})=0$ となり，

$$1-su-3v-st+3s^2tu+stv=0\cdots\cdots\cdots③$$

①③より，$1-su-3v-\dfrac{1}{3}+su+\dfrac{1}{3}v=0$，$\dfrac{2}{3}-\dfrac{8}{3}v=0$，$v=\dfrac{1}{4}\cdots\cdots\cdots④$

②④より，$\dfrac{3}{4}-3su=0$，$u=\dfrac{1}{4s}\cdots\cdots\cdots⑤$

(3)　①より，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}=(-1,\ 1,\ 1)-\dfrac{1}{3s}(s,\ s,\ s)=\dfrac{2}{3}(-2,\ 1,\ 1)$

④⑤より，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\vec{e}=(0,\ 0,\ 1)-\dfrac{1}{4s}(s,\ s,\ s)-\dfrac{1}{4}(-1,\ 1,\ 1)=\dfrac{1}{2}(0,\ -1,\ 1)$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ より△ODE は直角三角形となり，また $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ より OA は△ODE に垂直である。これより，四面体 OADE の体積 V は，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{OD}\cdot\mathrm{OE}\cdot\mathrm{OA}=\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{4+1+1}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{3}s=\frac{s}{3}$$

よって，条件から $V=2$ なので，$\dfrac{s}{3}=2$ すなわち $s=6$ である。

［解　説］

空間ベクトルの基本的な問題です。成分表示して計算していくと，スムーズに結論まで導けます。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　$f(x)=\dfrac{e^x-ae^{-x}}{2}$ のとき $y=f(x)$ とおくと，$x=f^{-1}(y)$ となり，

$$2y=e^x-ae^{-x},\quad e^{2x}-2ye^x-a=0$$

$a>0$，$e^x>0$ から，$e^x=y+\sqrt{y^2+a}$ となり，$x=\log\left(y+\sqrt{y^2+a}\right)$

よって，$f^{-1}(x)=\log\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)$ である。

(2)　$\dfrac{d}{dx}f^{-1}(x)=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+a}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$

(3)　x 軸，y 軸，直線 $x=c$ および曲線 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+c^2}}$ で囲まれる部分の面積 S は，

$$S=\int_0^c\frac{1}{\sqrt{x^2+c^2}}dx=\left[\log\left(x+\sqrt{x^2+c^2}\right)\right]_0^c=\log\left(c+\sqrt{2c^2}\right)-\log\sqrt{c^2}$$

$$=\log c+\log(1+\sqrt{2})-\log c=\log(1+\sqrt{2})$$

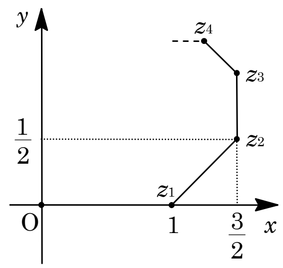
［解　説］

定積分の有名問題ですが，丁寧な誘導がついているため，知識がなくても迷うことはありません。

3

問題のページへ

(1)　$\alpha=\dfrac{1+i}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$なので，点$\alpha z$は点 z を原点回りに$\dfrac{\pi}{4}$回転し，原点との距離$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$倍した点である。



すると，与えられた条件から，

$$z_{n+2}-z_{n+1}=\alpha(z_{n+1}-z_n)\cdots\cdots\cdots(*)$$

$$z_3=z_2+\alpha(z_2-z_1)=\frac{3+i}{2}+\frac{1+i}{2}\cdot\frac{1+i}{2}$$

$$=\frac{3+i}{2}+\frac{i}{2}=\frac{3+2i}{2}$$

$$z_4=z_3+\alpha(z_3-z_2)=\frac{3+2i}{2}+\frac{1+i}{2}\cdot\frac{i}{2}=\frac{3+2i}{2}+\frac{-1+i}{4}=\frac{5+5i}{4}$$

(2)　$(*)$より，$z_{n+1}-z_n=(z_2-z_1)\alpha^{n-1}=\dfrac{1+i}{2}\alpha^{n-1}=\alpha^n$となり，$n\geqq 2$で，

$$z_n=z_1+\sum_{k=1}^{n-1}\alpha^k=1+\sum_{k=1}^{n-1}\alpha^k=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k=\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$$

$n=1$のときも成立するので，$z_n=\dfrac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$である。

(3)　$n\to\infty$のとき$|\alpha^n|=|\alpha|^n=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\to 0$より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\alpha^n=0$となり，

$$w=\lim_{n\to\infty}z_n=\frac{1}{1-\alpha}=\frac{2}{1-i}=1+i$$

(4)　(2)より，$z_n=\dfrac{1-\alpha^n}{1-\alpha}=(1+i)(1-\alpha^n)=(1+i)\left\{1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\left(\cos\dfrac{n}{4}\pi+i\sin\dfrac{n}{4}\pi\right)\right\}$

ここで，z_nの実部がwの実部 1 より大きくなることより，

$$1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\cos\frac{n}{4}\pi+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\sin\frac{n}{4}\pi>1,\ \sin\frac{n}{4}\pi-\cos\frac{n}{4}\pi>0$$

すると，$\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{n}{4}-\dfrac{1}{4}\right)\pi>0$となるので，$k$を 0 以上の整数として，

$$2k\pi<\left(\frac{n}{4}-\frac{1}{4}\right)\pi<(2k+1)\pi,\ 8k+1<n<8k+5$$

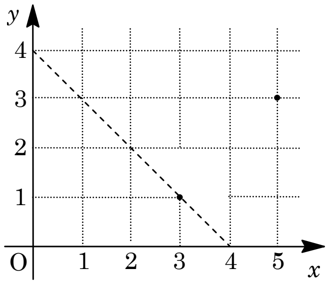
よって，$n=8k+2$，$8k+3$，$8k+4$である

［解 説］

複素数平面上の点の移動を題材にした頻出問題です。現行課程で復活し，日も浅いためなのか，問題文の説明が度を超えた丁寧さです。

4

問題のページへ



(1)　原点から出発した点 Q は，表が出たら x 軸の正の方向に 1，裏が出たら y 軸の正の方向に 1 動く。そして，この試行を n 回繰り返したとき，その到達点$(x_n,\ y_n)$は，点 $(3,\ 1)$ を通らないときは線分 $x+y=n$ $(x\geqq 0,\ y\geqq 0)$ 上の点，また点$(3,\ 1)$を通るといったん原点に戻り，続けて残りの試行を繰り返す。

さて，$(x_4,\ y_4)=(0,\ 0)$ となるのは，4 回目の試行で点$(3,\ 1)$に到達したときより，その確率は，${}_4\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\dfrac{1}{2}=4\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{1}{4}$ である。

(2)　$(x_8,\ y_8)=(5,\ 3)$ となるのは，8 回目の試行で点$(5,\ 3)$に到達し，しかも 4 回目の試行では点$(3,\ 1)$を通らないときより，その確率は，(1)を利用すると，

$$ {}_8\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^3-\frac{1}{4}\cdot{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=56\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^8-\frac{1}{4}\cdot 6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{8} $$

(3)　試行を 8 回行い，4 回目の試行で点$(3,\ 1)$を通らないときは$x_8+y_8=8$ となる。

また，4 回目の試行で点$(3,\ 1)$を到達し原点に戻った後，8 回目の試行で点$(3,\ 1)$に到達しないときは$x_8+y_8=4$ となり，8 回目の試行で点$(3,\ 1)$に到達するときは$(x_8,\ y_8)=(0,\ 0)$である。

したがって，$x_8+y_8\leqq 4$ となるのは 4 回目の試行で点$(3,\ 1)$に到達するときであり，その確率は，(1)から$\dfrac{1}{4}$ である。

(4)　試行を $4n$ 回行うとき，到達点$(x_{4n},\ y_{4n})$を考える。

まず，4 回目の試行で点$(3,\ 1)$を通らないときは，つねに$x_{4n}+y_{4n}=4n$ となる。

次に，4 回目の試行で点$(3,\ 1)$に到達し原点に戻った後，試行を続けるときは$x_{4n}+y_{4n}\leqq 4(n-1)$ となり，その確率は$\dfrac{1}{4}$ である。

さらに，4 回目と 8 回目に点$(3,\ 1)$に到達し原点に 2 回戻った後，試行を続けるときは$x_{4n}+y_{4n}\leqq 4(n-2)$ となり，その確率は$\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1}{16}$ である。

同様に考えて，l を整数$(0\leqq l\leqq n-1)$とし，4 回目，8 回目，…，$4l$ 回目に点$(3,\ 1)$に到達し原点に l 回戻った後，試行を続けるときは$x_{4n}+y_{4n}\leqq 4(n-l)$ となり，その確率は$\left(\dfrac{1}{4}\right)^l$ である。そこで，$k=n-l$ とおくと$1\leqq k\leqq n$ となり，$x_{4n}+y_{4n}\leqq 4k$ となる確率は$\left(\dfrac{1}{4}\right)^l=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-k}$ である。

［解　説］

確率の頻出問題ですが，振り出しに戻るというひねりが加えられています。

5

問題のページへ

(1)　数列$\{x_n\}$の各項の下2桁，すなわち100で割った余りについて，循環が始まるところをx_l，循環の周期をpとおく。

すると，x_0のみ奇数なので$l \geqq 1$となり，kを自然数として，

$$x_{l+p}-x_l=100k\,,\ \ 2^l(2^p-1)=2^2\cdot 5^2k\ \cdots\cdots\cdots①$$

①より，2^lは偶数，2^p-1は奇数なので，$l \geqq 2$で2^p-1は$5^2=25$の倍数となり，

$$2^p\equiv 1\pmod{25}\cdots\cdots\cdots②$$

②を満たす最小の自然数pを求めるために，以下，mod25で記すと，

$$2^1\equiv 2\,,\ 2^2\equiv 4\,,\ 2^3\equiv 8\,,\ 2^4\equiv 16\,,\ 2^5\equiv 7\,,\ 2^6\equiv 14\,,\ 2^7\equiv 3\,,\ 2^8\equiv 6$$

$$2^9\equiv 12\,,\ 2^{10}\equiv 24\equiv -1$$

すると，$2^{20}\equiv(-1)^2=1$となり，②を満たす最小の自然数pは20である。

よって，①は$l=2$，$p=20$で成立するので，$\{x_n\}$の各項の下 2 桁は，$x_2=4$から周期20の循環が始まる。

(2)　25で割って1余る2桁の自然数は, 26, 51, 76である。この中で, 4の倍数であるのは76より，$A=76$である。

(3)　125で割って1余る3桁の自然数は, 126, 251, 376, 501, 626, 751, 876である。この中で，8の倍数であるのは376より，$B=376$である。

(4)　(1)と同様に設定し，数列$\{x_n\}$の各項の下3桁，すなわち1000で割った余りについて，循環が始まるところをx_l ($l \geqq 1$)，循環の周期をpとおき，kを自然数として，

$$x_{l+p}-x_l=1000k\,,\ \ 2^l(2^p-1)=2^3\cdot 5^3k\ \cdots\cdots\cdots③$$

③より，$l \geqq 3$で，2^p-1は125の倍数となり，

$$2^p\equiv 1\pmod{125}\cdots\cdots\cdots④$$

ここで，2^mを125で割って1余るような最小の自然数mが100であることより，④を満たす最小の自然数pは100である。

よって，③は$l=3$，$p=100$で成立するので，$\{x_n\}$の各項の下 3 桁は，$x_3=8$から周期100の循環が始まる。

［解　説］

数列の周期性についての問題です。(1)は，はじめ下2桁の数値を列挙して求めようと思ったのですが，なかなか同じものが現れず，途中で止めて方針転換をしました。ただ，後続の設問をみると，出題意図は放棄した方法だったかもしれません。