$\boxed{1}$ 解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$を，$a_1=\tan\dfrac{\pi}{3}$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{\sqrt{{a_n}^2+1}+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$により定める。次の問いに答えよ。

(1)　$a_2=\tan\dfrac{\pi}{6}$，$a_3=\tan\dfrac{\pi}{12}$であることを示せ。

(2)　一般項a_nを表す n の式を推定し，それが正しいことを数学的帰納法により証明せよ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}2^n a_n$を求めよ。

2

解答解説のページへ

$a>0$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(t)=t^3-2at+1$ の区間 $t \geqq 0$ における最小値を，a を用いて表せ。

(2)　(1)で求めた最小値が 0 となるときの a の値を A とおく。A^3 を求めよ。

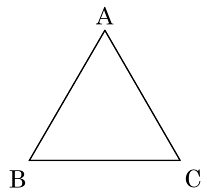
(3)　座標平面上の曲線 $y=x^4$ を C_1，点 $(0,\ a)$ を中心とする半径 a の円を C_2 とする。C_1 と C_2 の共有点の個数を調べよ。

(4)　座標平面において，点 P が曲線 $y=x^4$ 上を動くときの点 P と点 $(0,\ a)$ の距離の最小値を考える。その最小値が a に等しくなるような a の値の範囲を求めよ。

3

解答解説のページへ

表が出る確率が p, 裏が出る確率が $1-p$ であるようなコインがある。ただし, $0<p<1$ である。このとき, 右図のような正三角形の 3 頂点 A, B, C を次の規則で移動する動点 R を考える。



コインを投げて表が出れば R は反時計まわりに隣の頂点に移動し, 裏が出れば R は時計まわりに隣の頂点に移動する。

R は最初 A にあり, 全部で $(2N+3)$ 回移動する。ここで, N は自然数である。移動回数がちょうど k に達したときに R が A に初めて戻る確率を P_k $(k=2,\ 3,\ \cdots,\ 2N+3)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) P_2, P_3 を求めよ。

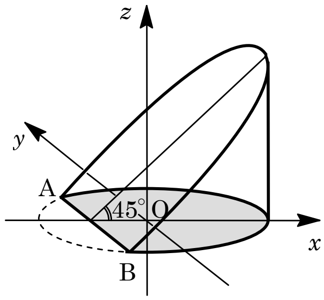
(2) P_{2m}, P_{2m+1} $(2 \leqq m \leqq N+1)$ を求めよ。

(3) $p=\dfrac{1}{2}$ とする。移動回数がちょうど $2N+3$ に達したときに R が A に 2 度目に戻る確率 Q を求めよ。

4

解答解説のページへ

座標空間内の平面 $H: z=0$ とその上の曲線 $C: \dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を考える。C 上の点を通り z 軸に平行な直線の全体が作る曲面を K とする。C 上の 2 点 $\mathrm{A}\left(-1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{B}\left(-1,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$ に対し，線分 AB を含み平面 H と $45°$ の角をなす平面を T とする。ただし，平面 T と z 軸の交点の z 座標は正であるとする。平面 H, 平面 T および曲面 K が囲む 2 つの立体のうち z 軸と交わるものを V とする。次の問いに答えよ。



(1)　立体 V と平面 H の共通部分（右図で灰色で示される部分）の面積を求めよ。

(2)　立体 V を平面 $x=t$ $(-1<t<2)$ で切ったとき，断面の面積 $S(t)$ を t を用いて表せ。

(3)　立体 V の体積を求めよ。

5

解答解説のページへ

x 座標, y 座標がともに整数である座標平面上の点を格子点とよぶ。格子点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ および $\mathrm{A}(50,\ 14)$ を考える。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=6$ を満たす格子点 P を 1 つ求めよ。

(2) m を自然数とする。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=6$ を満たす格子点 P のうち, 長さ OP が m 番目に小さい点を P_m とする。P_1 および P_2 を求めよ。

(3) P_m を(2)で定めた格子点とする。自然数 k に対し, ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{P}_{2k}\mathrm{P}_{2k+1}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{P}_{2k}\mathrm{P}_{2k+2}}$ を成分表示せよ。

(4) P_m を(2)で定めた格子点とする。Q を $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{P}_{14}\mathrm{P}_{16}}$ を満たす点とする。四角形 $\mathrm{OQP}_{16}\mathrm{P}_{14}$ の周および内部に含まれる格子点をすべて求めよ。

1

問題のページへ

(1) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}$ とおくと，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，

$$f(\tan\theta)=\frac{\tan\theta}{\sqrt{\tan^2\theta+1}+1}=\frac{\tan\theta}{\dfrac{1}{\cos\theta}+1}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}}{2\cos^2\dfrac{\theta}{2}}=\tan\frac{\theta}{2}$$

さて，$a_1=\tan\dfrac{\pi}{3}$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{\sqrt{{a_n}^2+1}+1}=f(a_n)$ に対して，$\theta_1=\dfrac{\pi}{3}$ とおくと，

$$a_2=f(a_1)=f(\tan\theta_1)=\tan\frac{\theta_1}{2}=\tan\frac{\pi}{6}$$

さらに，$\theta_2=\dfrac{\pi}{6}$ とおくと，$a_3=f(a_2)=f(\tan\theta_2)=\tan\dfrac{\theta_2}{2}=\tan\dfrac{\pi}{12}$

(2) まず，$a_n=\tan\dfrac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}$ と推測できるので，これを数学的帰納法により証明する。

(i) $n=1$ のとき　$a_1=\tan\dfrac{\pi}{3\cdot 2^0}=\tan\dfrac{\pi}{3}$ より成立している。

(ii) $n=k$ のとき　$a_k=\tan\theta_k\left(\theta_k=\dfrac{\pi}{3\cdot 2^{k-1}}\right)$ と仮定すると，$0<\theta_k<\dfrac{\pi}{2}$ で，

$$a_{k+1}=f(a_k)=f(\tan\theta_k)=\tan\frac{\theta_k}{2}=\tan\frac{\pi}{3\cdot 2^k}$$

よって，$n=k+1$ のときも成立している。

(i)(ii)より，$a_n=\tan\dfrac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}$ である。

(3) まず，$\theta\to 0$ のとき $\dfrac{\tan\theta}{\theta}\to 1$ であることに着目して変形すると，

$$2^n a_n=2^n\tan\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}=\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{\tan\dfrac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}}{\dfrac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}2^n a_n=\frac{2\pi}{3}$ である。

［解 説］

数列の極限に関する基本的な問題です。ただ，同じプロセスを 3 回記すのは気後れしましたので，初めに作った解をリフォームしています。

2

問題のページへ

(1)　$a>0$ のとき，$f(t)=t^3-2at+1$ に対して，

$$f'(t)=3t^2-2a$$

$t\geqq 0$ において $f(t)$ の増減を調べると，右表のようになり，最小値は，

t	0	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{2a}{3}}$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$	1	$\searrow$		$\nearrow$

$$f\left(\sqrt{\frac{2a}{3}}\right)=\left(\frac{2a}{3}-2a\right)\sqrt{\frac{2a}{3}}+1=-\frac{4}{3}a\sqrt{\frac{2a}{3}}+1=-\frac{4}{9}a\sqrt{6a}+1$$

(2)　条件より，$-\dfrac{4}{9}A\sqrt{6A}+1=0$ となるので，$\dfrac{4}{9}A\sqrt{6A}=1$ から，

$$\frac{16\cdot 6}{81}A^3=1,\ A^3=\frac{81}{16\cdot 6}=\frac{27}{32}$$

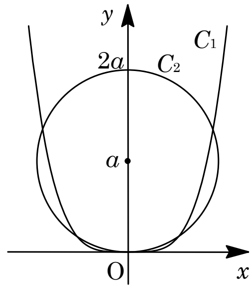
(3)　$C_1: y=x^4$ ……①，$C_2: x^2+(y-a)^2=a^2$ ……②を連立し，

$$x^2+(x^4-a)^2=a^2,\ x^8-2ax^4+x^2=0$$

ここで，$x^2=t\geqq 0$ とおくと，$t^4-2at^2+t=0$ から，

$$t(t^3-2at+1)=0 \text{………③}$$

すると，$t=0$ ……④または $t^3-2at+1=0$ ……⑤



さて，(1)から⑤は $f(t)=0$ となり，しかも $t\neq 0$ である。

また，(2)から $A=\sqrt[3]{\dfrac{27}{32}}=\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{2}$ となるので，C_1 と C_2 の共有点の個数は，

(i)　$-\dfrac{4}{9}a\sqrt{6a}+1>0\left(0<a<\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{2}\right)$ のとき

⑤の実数解は 0 個なので，③の実数解は④の $t=0$ のみとなる。よって，C_1 と C_2 の共有点の個数は 1 である。

(ii)　$-\dfrac{4}{9}a\sqrt{6a}+1=0\left(a=\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{2}\right)$ のとき

⑤の異なる正の実数解は 1 個なので，③の実数解は④の $t=0$ と合わせて 2 個となる。よって，C_1 と C_2 の共有点の個数は $1+1\times 2=3$ である。

(iii)　$-\dfrac{4}{9}a\sqrt{6a}+1<0\left(a>\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{2}\right)$ のとき

⑤の異なる正の実数解は 2 個なので，③の実数解は④の $t=0$ と合わせて 3 個となる。よって，C_1 と C_2 の共有点の個数は $1+2\times 2=5$ である。

(4)　C_1 上の点 $\mathrm{P}(p,\ p^4)$ と点 $(0,\ a)$ の距離を d とおくと，

$$d^2=p^2+(p^4-a)^2=p^8-2ap^4+p^2+a^2$$

ここで，$p^2=t\geqq 0$ とおくと，$d^2=t^4-2at^2+t+a^2=tf(t)+a^2$

さて，d^2 の最小値は a^2 なので，$t\geqq 0$ において $tf(t)\geqq 0$ すなわち $f(t)\geqq 0$ が必要となり，(3)から，$0<a\leqq\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{2}$ である。

逆に，このとき $t=0$ で $tf(t)=0$ となるので，d^2 の最小値は a^2 である。

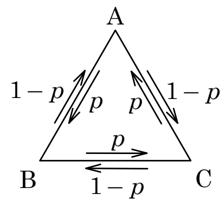
以上より，求める条件は $0 < a \leqq \dfrac{3}{4}\sqrt[3]{2}$ である。

［解 説］

微分の応用についての問題です。(3)では x を消去するか，y を消去するか迷いますが，(1)を誘導とみると後者に落ち着きます。また，t の個数と x の個数の対応関係に注意が必要です。なお，(4)の結論は(3)から明らかですが，その過程も念のため記しておきました。重複しますが。

3

問題のページへ



(1)　まず, R が 2 回目に A に初めて戻るのは, $A \to B \to A$ または $A \to C \to A$ から, その確率 P_2 は,

$$P_2 = p(1-p)+(1-p)p = 2p(1-p)$$

また, R が 3 回目に A に初めて戻るのは, $A \to B \to C \to A$ または $A \to C \to B \to A$ から, その確率 P_3 は,

$$P_3 = p^3+(1-p)^3 = 1-3p+3p^2$$

(2)　R が $2m$ 回目に A に初めて戻るのは, A→B→C→B→C→B→…→C→B→A または A→C→B→C→B→C→…→B→C→A から, その確率 P_{2m} は,

$$P_{2m} = p\{p(1-p)\}^{m-1}(1-p)+(1-p)\{(1-p)p\}^{m-1}p = 2p^m(1-p)^m$$

また, R が $2m+1$ 回目に A に初めて戻るのは, A→B→C→B→C→…→B→C→A または A→C→B→C→B→…→C→B→A から, その確率 P_{2m+1} は,

$$\begin{aligned} P_{2m+1} &= p\{p(1-p)\}^{m-1}p^2+(1-p)\{(1-p)p\}^{m-1}(1-p)^2 \\ &= p^3\{p(1-p)\}^{m-1}+(1-p)^3\{(1-p)p\}^{m-1} \\ &= (1-3p+3p^2)p^{m-1}(1-p)^{m-1} \end{aligned}$$

(3)　$p=\dfrac{1}{2}$ のとき, (2)より, $P_{2m} = 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^m\left(\dfrac{1}{2}\right)^m = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2m-1}$

$$P_{2m+1} = \left(1-\frac{3}{2}+\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2m}$$

さて, R が $2N+3$ 回目に A に 2 度目に戻るのは,

(i)　R が A に初めて戻るのが $2m$ 回目 $(m=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$ のとき

その確率は, $P_{2m}P_{2N+3-2m} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2m-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2N-2m+2} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2N+1}$

(ii)　R が A に初めて戻るのが $2m+1$ 回目 $(m=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$ のとき

その確率は, $P_{2m+1}P_{2N+3-(2m+1)} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2m}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2N-2m+1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2N+1}$

(i)(ii)より, R が $2N+3$ 回目に A に 2 度目に戻る確率 Q は,

$$Q = \sum_{m=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N+1}+\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N+1} = 2N\left(\frac{1}{2}\right)^{2N+1} = \frac{N}{2^{2N}}$$

［解 説］

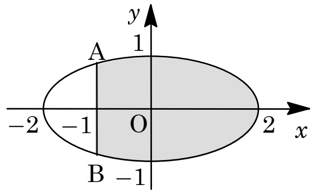
確率の計算問題です。ミスを防ぐような丁寧な誘導がついています。

$\boxed{4}$

問題のページへ

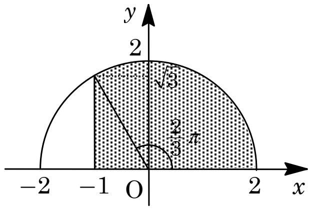
(1)　楕円 $C: \dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ に対して,

$$y=\pm\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}\ \cdots\cdots\cdots(*)$$



さて, C に囲まれる図形の $x\geqq -1$ の部分の面積を T とすると, x 軸に関する対称性より,

$$T=2\int_{-1}^{2}\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_{-1}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$$

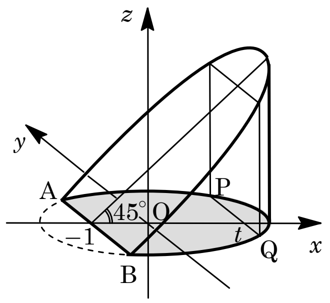


そして, T の値は右図の網点部の面積が対応し,

$$T=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}=\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(2)　$(*)$に $x=t$ を代入すると，$y=\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{4-t^2}$ となり, C と直線 $x=t$ の交点を P, Q とおくと,

$$\mathrm{PQ}=\sqrt{4-t^2}$$



これより，立体 V を平面 $x=t$ で切ったとき，断面の長方形の面積 $S(t)$ は,

$$S(t)=\mathrm{PQ}\cdot\{t-(-1)\}\tan 45^\circ=(t+1)\sqrt{4-t^2}$$

(3)　立体 V の体積 W は, (1)の結果も利用して,

$$W=\int_{-1}^{2}S(t)dt=\int_{-1}^{2}t\sqrt{4-t^2}\,dt+\int_{-1}^{2}\sqrt{4-t^2}\,dt$$

$$=\int_{-1}^{2}t\sqrt{4-t^2}\,dt+\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ここで，$4-t^2=u$ とおくと，$-2tdt=du$ から,

$$\int_{-1}^{2}t\sqrt{4-t^2}\,dt=\int_{3}^{0}\sqrt{u}\left(-\frac{1}{2}\right)du=\frac{1}{2}\int_{0}^{3}u^{\frac{1}{2}}\,du=\frac{1}{3}\Big[u^{\frac{3}{2}}\Big]_0^3=\sqrt{3}$$

よって，$W=\sqrt{3}+\dfrac{4}{3}\pi+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{4}{3}\pi+\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$ となる。

［解　説］

立体の体積を求める頻出タイプの問題です。問題文に参考図が書かれているため, 見通しはかなりよくなっています。

5　　問題のページへ

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(50,\ 14)$に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x,\ y)$とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=6$より，

$$50x+14y=6,\ 25x+7y=3\cdots\cdots\text{①}$$

すると，①を満たす解の1つとして$(x,\ y)=(-1,\ 4)$から，$\mathrm{P}(-1,\ 4)$となる。

(2)　(1)より，$25\cdot(-1)+7\cdot4=3\cdots\cdots$②となり，①－②から，

$$25(x+1)+7(y-4)=0,\ 25(x+1)=-7(y-4)$$

すると，25と7は互いに素なのでlを整数として，$x+1=-7l$，$y-4=25l$

$$(x,\ y)=(-7l-1,\ 25l+4)\cdots\cdots\text{③}$$

ここで，OPがm番目に小さい点をP_mとすると，③から，

$$\mathrm{OP}^2=(-7l-1)^2+(25l+4)^2=674l^2+214l+17$$
$$=674\left(l+\frac{107}{674}\right)^2-\frac{107^2}{674}+17$$

これより，$-\frac{1}{2}<-\frac{107}{674}<0$から，OP が一番小さい$(m=1)$のは$l=0$のときより$\mathrm{P}_1(-1,\ 4)$，次に小さい$(m=2)$のは$l=-1$のときより$\mathrm{P}_2(6,\ -21)$である。

(3)　(2)と同様に考えて，$m=1$のとき$l=0$，$m=2$のとき$l=-1$，$m=3$のとき$l=1$，$m=4$のとき$l=-2$，$m=5$のとき$l=2$，…より，自然数kに対して帰納的に，$m=2k+1$のとき$l=k$，$m=2k$のとき$l=-k$となり，③から，

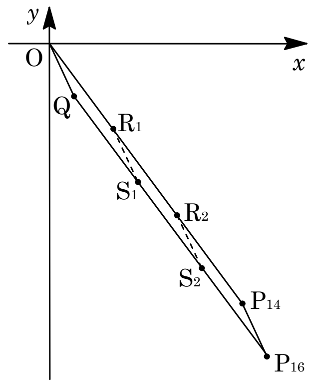
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_{2k+1}}=(-7k-1,\ 25k+4),\ \overrightarrow{\mathrm{OP}_{2k}}=(7k-1,\ -25k+4)$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{P}_{2k}\mathrm{P}_{2k+1}}=(-7k-1-(7k-1),\ 25k+4-(-25k+4))=(-14k,\ 50k)$

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_{2k}\mathrm{P}_{2k+2}}=(7k+6-(7k-1),\ -25k-21-(-25k+4))=(7,\ -25)$$

(4)　(3)より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_{14}}=(7\cdot7-1,\ -25\cdot7+4)=(48,\ -171)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_{16}}=(7\cdot8-1,\ -25\cdot8+4)=(55,\ -196)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{P}_{14}\mathrm{P}_{16}}=(7,\ -25)$$



すると，右図のように四角形$\mathrm{OQP}_{16}\mathrm{P}_{14}$は平行四辺形となり，この周および内部に含まれる格子点を調べる。

まず，頂点O，Q，P_{16}，P_{14}はすべて格子点である。

次に，辺 OQ の方程式は，$y=-\frac{25}{7}x$から，両端点以外に格子点はない。また，辺$\mathrm{P}_{14}\mathrm{P}_{16}$も同様である。

また，辺OP_{14}の方程式は，$y=-\frac{171}{48}x=-\frac{57}{16}x$から，両端点以外に格子点$\mathrm{R}_1(16,\ -57)$，$\mathrm{R}_2(32,\ -114)$が存在する。また，辺$\mathrm{QP}_{16}$も同様で，両端点以外に格子点$\mathrm{S}_1(23,\ -82)$，$\mathrm{S}_2(39,\ -139)$が存在する。

さらに，四角形$\mathrm{OQP}_{16}\mathrm{P}_{14}$の内部に格子点$(a,\ b)$が存在すると仮定すると，

$$-\frac{57}{16}(a-7)-25<b<-\frac{57}{16}a,\ \ -\frac{57a+1}{16}<b<-\frac{57}{16}a\ \cdots\cdots\cdots ④$$

④より，$-57a-1<16b<-57a$，$-1<57a+16b<0$ となり，a，b は整数より成立しない。すなわち，四角形$\mathrm{OQP_{16}P_{14}}$の内部に格子点は存在しない。

以上より，$\mathrm{OQP_{16}P_{14}}$の周および内部に含まれる格子点の座標は，

$(0,\ 0)$，$(7,\ -25)$，$(23,\ -82)$，$(39,\ -139)$，$(55,\ -196)$，$(48,\ -171)$
$(16,\ -57)$，$(32,\ -114)$

［解 説］

格子点と整数についての問題です。(3)までは標準的ですが，最後の設問の(4)は数値が大きく，さらに図が描きにくいために，かなり面倒です。