1　　解答解説のページへ

$a>0$，$r>0$ とし，数列$\{a_n\}$を初項 a，公比 r の等比数列とする。また，数列$\{b_n\}$は次のように定義される。

$$b_1=a_1,\ b_{n+1}=b_n a_{n+1}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

次の問いに答えよ。

(1)　b_n を a, r および n を用いて表せ。

(2)　一般項が $c_n=\dfrac{\log_2 b_n}{n}$ である数列$\{c_n\}$は等差数列であることを証明せよ。

(3)　(2)で与えられた数列$\{c_n\}$の初項から第 n 項までの平均を M_n とする。すなわち，$M_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c_k$ とする。このとき，一般項が $d_n=2^{M_n}$ である数列$\{d_n\}$は等比数列であることを証明せよ。

2

解答解説のページへ

n を自然数とし，p を $0<p<1$ を満たす実数とする。一方の面に 0，もう一方の面に 1 と書いたカードがある。最初，このカードは 0 と書かれた面が上になるように置いてある。表の出る確率が p のコインを投げ，裏が出たときだけカードを裏返すという試行を n 回繰り返して行う。n 回の試行の後，カードの上の面に書かれた数字が 0 である確率を P_n とおく。次の問いに答えよ。

(1)　P_n を p および n を用いて表せ。

(2)　$n\geqq 2$ とする。n 回の試行の後，カードの上の面に書かれた数字が 0 であり，さらに，途中でカードが少なくとも 1 回裏返されたことがわかっている。このとき，ちょうど 2 回裏返された確率を p および n を用いて表せ。

3

解答解説のページへ

座標平面上の 2 つの曲線 $C : y = x^3$，$C' : y = 8x^3$ と曲線 C 上の点 $\mathrm{P}_1(1,\ 1)$ を考える。点 P_1 を通り x 軸と平行な直線と曲線 C' の交点を Q_1 とし，点 Q_1 を通り y 軸と平行な直線と曲線 C の交点を P_2 とする。次に，点 P_2 を通り x 軸と平行な直線と曲線 C' の交点を Q_2 とし，点 Q_2 を通り y 軸と平行な直線と曲線 C の交点を P_3 とする。このように，自然数 n に対して，点 P_n を通り x 軸と平行な直線と曲線 C' の交点を Q_n とし，点 Q_n を通り y 軸と平行な直線と曲線 C の交点を P_{n+1} とする。点 P_n の x 座標を a_n とおく。次の問いに答えよ。

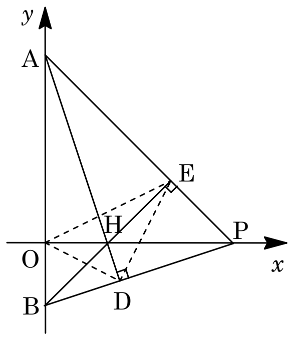
(1)　a_n を n を用いて表せ。

(2)　点 P_{n+1} における曲線 C の接線，直線 $x = a_n$ および曲線 C で囲まれる部分のうち，$a_{n+1} \leqq x \leqq a_n$ の領域にある面積を S_n とする。S_n を n を用いて表せ。

(3)　$T_n = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$ とおく。T_n を n を用いて表せ。

4

解答解説のページへ



原点を O とする座標平面上において，点 A(0, 3)，B(0, −1) および x 軸上の正の部分を動く点 P(t, 0) があり，∠APB は鈍角でないとする。△ABP の垂心を H，頂点 A から辺 BP に下ろした垂線と辺 BP との交点を D，頂点 B から辺 PA に下ろした垂線と辺 PA との交点を E とする。次の問いに答えよ。ただし，三角形の各頂点から対辺，またはその延長に下ろした 3 本の垂線は 1 点で交わることが知られている。この交点のことを，三角形の垂心という。

(1)　∠APB が直角となる t の値を求めよ。

(2)　点 H の座標を t を用いて表せ。

以下では，t が(1)で求めた値よりも大きい値をとるとする。

(3)　点 H が△ODE の内心であることを証明せよ。ただし，1 組の対角の和が 180° である四角形は円に内接することを，証明なしに利用してもよい。

(4)　△ODE の内接円の半径を t を用いて表せ。

1

問題のページへ

(1) 数列$\{a_n\}$は初項$a>0$，公比$r>0$の等比数列より，$a_n=ar^{n-1}$ ………①

さて，数列$\{b_n\}$に対し，$b_1=a_1$，$b_{n+1}=b_na_{n+1}$より，$n\geqq 2$で①を用いて，

$$b_n=b_1a_2a_3\cdots a_n=a_1a_2a_3\cdots a_n=a\cdot ar\cdot ar^2\cdot\cdots\cdot ar^{n-1}=a^nr^{1+2+\cdots+(n-1)}$$
$$=a^nr^{\frac{1}{2}n(n-1)}\ \cdots\cdots\cdots②$$

なお，$n=1$のとき，②は$b_1=a^1r^0=a$となり成立している。

(2) 条件より，$c_n=\dfrac{\log_2 b_n}{n}$に対して，②から，

$$c_n=\frac{1}{n}\log_2 a^nr^{\frac{1}{2}n(n-1)}=\frac{1}{n}\log_2 a^n+\frac{1}{n}\log_2 r^{\frac{1}{2}n(n-1)}$$
$$=\log_2 a+\frac{1}{2}(n-1)\log_2 r\ \cdots\cdots\cdots③$$

これより，$c_{n+1}-c_n=\left(\log_2 a+\dfrac{1}{2}n\log_2 r\right)-\left(\log_2 a+\dfrac{1}{2}(n-1)\log_2 r\right)=\dfrac{1}{2}\log_2 r$

となり，数列$\{c_n\}$は公差$\dfrac{1}{2}\log_2 r$の等差数列である。

(3) $M_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c_k$なので，③から$M_n=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{c_1+c_n}{2}\cdot n=\dfrac{c_1+c_n}{2}$となり，

$$M_n=\frac{1}{2}\left\{\log_2 a+\log_2 a+\frac{1}{2}(n-1)\log_2 r\right\}=\log_2 a+\frac{1}{4}(n-1)\log_2 r\ \cdots\cdots④$$

すると，$d_n=2^{M_n}$に対して，④より，

$$d_n=2^{\log_2 a+\frac{1}{4}(n-1)\log_2 r}=2^{\log_2 a}\cdot 2^{\log_2 r^{\frac{1}{4}(n-1)}}=ar^{\frac{1}{4}(n-1)}$$

これより，$\dfrac{d_{n+1}}{d_n}=\dfrac{ar^{\frac{1}{4}n}}{ar^{\frac{1}{4}(n-1)}}=r^{\frac{1}{4}}$となり，数列$\{d_n\}$は公比$r^{\frac{1}{4}}$の等比数列である。

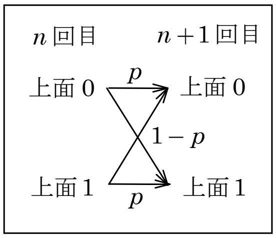
［解 説］

漸化式と等差数列・等比数列の融合問題です。完答へのネックになるのは，(1)の漸化式の解法ですが，ここは「ピンポイント レクチャー」を参照してください。

2

問題のページへ

(1)　一方の面に 0, もう一方の面に 1 と書いたカードがあり, 表の出る確率が p のコインを投げ, 裏が出たときだけカードを裏返す試行を n 回行った後, カードの上面に書かれた数字が 0 である確率を P_n とおくと,



$$P_{n+1}=pP_n+(1-p)(1-P_n)$$
$$=(2p-1)P_n+(1-p)\cdots\cdots\cdots(*)$$

(*)を変形すると, $P_{n+1}-\dfrac{1}{2}=(2p-1)\left(P_n-\dfrac{1}{2}\right)$ となり, さらにカードの上面に書かれた数字は最初 0 なので $P_1=p$ から,

$$P_n-\frac{1}{2}=\left(P_1-\frac{1}{2}\right)(2p-1)^{n-1}=\left(p-\frac{1}{2}\right)(2p-1)^{n-1}=\frac{1}{2}(2p-1)^n$$

よって, $P_n=\dfrac{1}{2}(2p-1)^n+\dfrac{1}{2}$ である。

(2)　n 回の試行の後, カードの上面が 0 で, 少なくとも 1 回裏返された確率は,

$$P_n-p^n=\frac{1}{2}(2p-1)^n-p^n+\frac{1}{2}$$

また, n 回の試行の後, カードの上面が 0 で, ちょうど 2 回裏返された確率は,

$${}_n\mathrm{C}_2p^{n-2}(1-p)^2=\frac{1}{2}n(n-1)p^{n-2}(1-p)^2$$

すると, n 回の試行の後, カードの上面が 0 で, 少なくとも 1 回裏返されたという条件のもとで, ちょうど 2 回裏返された条件付き確率は,

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_2p^{n-2}(1-p)^2}{P_n-p^n}=\frac{n(n-1)p^{n-2}(1-p)^2}{(2p-1)^n-2p^n+1}$$

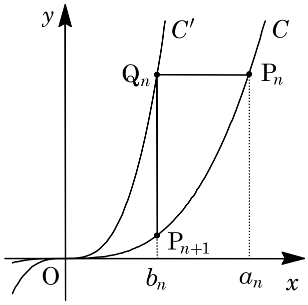
［解　説］

確率と漸化式および条件付き確率に関する基本題です。

3

問題のページへ

(1)　曲線 $C: y = x^3$，$C': y = 8x^3$ に対して，C 上の点 $\mathrm{P}_n(a_n,\ a_n{}^3)$，$C'$ 上の点を $\mathrm{Q}_n(b_n,\ 8b_n{}^3)$ とおく。



P_n を通り x 軸と平行な直線と C' の交点が Q_n より，

$$a_n{}^3 = 8b_n{}^3,\ a_n = 2b_n \cdots\cdots\cdots①$$

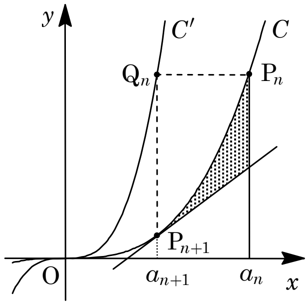
Q_n を通り y 軸と平行な直線と C の交点が P_{n+1} より，

$$b_n = a_{n+1} \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n$ となり，$\mathrm{P}_1(1,\ 1)$ から，

$$a_n = a_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdots\cdots\cdots③$$

(2)　(1)から $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n$ なので，$\mathrm{P}_{n+1}\left(\dfrac{1}{2}a_n,\ \dfrac{1}{8}a_n{}^3\right)$ となる。



$C: y = x^3$ に対し $y' = 3x^2$ より，P_{n+1} における接線は，

$$y - \frac{1}{8}a_n{}^3 = 3\cdot\frac{1}{4}a_n{}^2\left(x - \frac{1}{2}a_n\right),\ y = \frac{3}{4}a_n{}^2x - \frac{1}{4}a_n{}^3$$

すると，$x = a_n$ との交点は，$y = \dfrac{3}{4}a_n{}^3 - \dfrac{1}{4}a_n{}^3 = \dfrac{1}{2}a_n{}^3$

これより，右図の網点部の面積 S_n は，③から，

$$S_n = \int_{\frac{1}{2}a_n}^{a_n} x^3\,dx - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}a_n{}^3 + \frac{1}{2}a_n{}^3\right)\left(a_n - \frac{1}{2}a_n\right)$$

$$= \frac{1}{4}\Big[\,x^4\,\Big]_{\frac{1}{2}a_n}^{a_n} - \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{8}a_n{}^3\cdot\frac{1}{2}a_n = \frac{1}{4}a_n{}^4 - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16}a_n{}^4 - \frac{5}{32}a_n{}^4 = \frac{5}{64}a_n{}^4$$

$$= \frac{5}{64}\left(\frac{1}{2}\right)^{4(n-1)} = \frac{5}{64}\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1} = \frac{5}{4}\left(\frac{1}{16}\right)^n$$

(3)　$T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} S_k = \frac{5}{4}\cdot\frac{\frac{1}{16}\left\{1 - \left(\frac{1}{16}\right)^n\right\}}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{1}{12}\left\{1 - \left(\frac{1}{16}\right)^n\right\}$

［解　説］

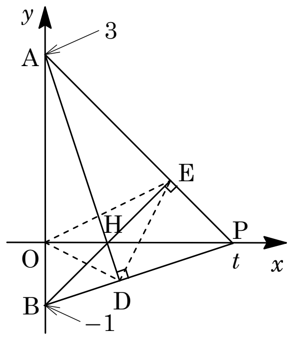
漸化式と微積分の融合問題です。計算ミスに要注意です。

4　問題のページへ

(1)　$t>0$ のとき，A$(0,\ 3)$，B$(0,\ -1)$，P$(t,\ 0)$ に対し，直線 AP の傾きは $\dfrac{-3}{t}$，直線 BP の傾きは $\dfrac{1}{t}$ なので，∠APB が直角の条件は，

$$\frac{-3}{t}\cdot\frac{1}{t}=-1,\ t^2=3$$

よって，$t>0$ から $t=\sqrt{3}$ である。



(2)　AD ⊥ BP より，直線 AD は傾き $-t$ から，その方程式は，

$$y=-tx+3\ \cdots\cdots\cdots①$$

直線 AD と OP の交点が△ABP の垂心 H なので，$0=-tx+3$ より $x=\dfrac{3}{t}$ となり，H$\left(\dfrac{3}{t},\ 0\right)$ である。

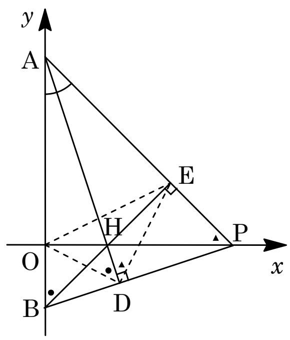
(3)　$t>\sqrt{3}$ のとき，∠APB は鋭角となる。

さて，∠BOH＋∠BDH＝180° より，四角形 OBDH は円に内接するので，

$$\angle\mathrm{ADO}=\angle\mathrm{ABE}\ \cdots\cdots\cdots②$$

また，∠PEH＋∠PDH＝180° より，四角形 PEHD は円に内接するので，

$$\angle\mathrm{ADE}=\angle\mathrm{APO}\ \cdots\cdots\cdots③$$



さらに，△ABE と△AOP はともに直角三角形なので，

$$\angle\mathrm{ABE}=90°-\angle\mathrm{BAP}=\angle\mathrm{APO}\ \cdots\cdots\cdots④$$

②③④より，∠ADO＝∠ADE となり，直線 AD は∠ODE の二等分線である。

同様にすると，直線 BE は∠OED の二等分線である。

以上より，直線 AD と BE の交点 H は，△ODE の内心になる。

(4)　まず，直線 BP の方程式は，$y=\dfrac{1}{t}x-1\ \cdots\cdots\cdots⑤$

①⑤を連立して，$-tx+3=\dfrac{1}{t}x-1$ より，$\dfrac{t^2+1}{t}x=4$ となり，

$$x=\frac{4t}{t^2+1},\ y=-\frac{4t^2}{t^2+1}+3=-\frac{t^2-3}{t^2+1}$$

これより，D$\left(\dfrac{4t}{t^2+1},\ -\dfrac{t^2-3}{t^2+1}\right)$ となり，直線 OD の方程式は，

$$y=-\frac{t^2-3}{4t}x,\ (t^2-3)x+4ty=0$$

すると，△ODE の内接円の半径 r は，H$\left(\dfrac{3}{t},\ 0\right)$ と直線 OD の距離になり，$t>\sqrt{3}$ から，

$$r=\frac{\left|(t^2-3)\cdot\dfrac{3}{t}\right|}{\sqrt{(t^2-3)^2+16t^2}}=\frac{3(t^2-3)}{t\sqrt{(t^2-3)^2+16t^2}}=\frac{3(t^2-3)}{t\sqrt{t^4+10t^2+9}}$$

［解　説］

三角形の垂心と内心を題材にした図形と式の問題です。(3)はいろいろな解法が考えられますが，問題文の誘導に従ったもので記述しています。有名題ですが……。