1

解答解説のページへ

$a>0$，$r>0$ とし，数列$\{a_n\}$を初項 a，公比 r の等比数列とする。また，数列$\{b_n\}$は次のように定義される。

$$b_1=a_1,\ b_{n+1}=b_n a_{n+1}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

次の問いに答えよ。

(1)　b_n を a, r および n を用いて表せ。

(2)　一般項が $c_n=\dfrac{\log_2 b_n}{n}$ である数列$\{c_n\}$は等差数列であることを証明せよ。

(3)　(2)で与えられた数列$\{c_n\}$の初項から第 n 項までの平均を M_n とする。すなわち，$M_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c_k$ とする。このとき，一般項が $d_n=2^{M_n}$ である数列$\{d_n\}$は等比数列であることを証明せよ。

2

解答解説のページへ

箱の中に 1 から N までの数が 1 つずつ書かれた N 枚のカードが入っている。ただし, N を 2 以上の自然数とする。「カードをよく混ぜて 1 枚取り出し, そのカードに書かれた数を読み取り, そのカードをもとに戻す」という試行を 4 回繰り返す。1 回目, 2 回目, 3 回目および 4 回目に取り出したカードに書かれた数を, それぞれ a_1, a_2, a_3, a_4 とする。また, 座標平面上に 4 点 $\mathrm{P}_1(a_1,\ 0)$, $\mathrm{P}_2(a_1,\ a_2)$, $\mathrm{P}_3(a_1-a_3,\ a_2)$, $\mathrm{P}_4(a_1-a_3,\ a_2-a_4)$を定める。次の問いに答えよ。

(1) P_4 が原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ に一致する確率を N を用いて表せ。

(2) P_4 が連立不等式 $x \geqq 0$, $y \leqq 0$ の表す領域にある確率を N を用いて表せ。

(3) P_4 が直線 $y=x$ 上にある確率を N を用いて表せ。

(4) $N=2^m$ とする。ただし, m を自然数とする。P_4 が原点 O に一致し, かつ, 四角形 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4$ の面積が 2^m となる確率を m を用いて表せ。

3

解答解説のページへ

関数 $f(x)$ は実数全体で連続で，すべての実数 x に対して

$$f(x)=(1-x)\cos x+x\sin x-\int_0^x e^{x-t}f(t)\,dt$$

を満たすとする。ただし，e は自然対数の底である。次の問いに答えよ。

(1)　$f(0)$ の値を求めよ。また，$f'(x)=2(x-1)\cos x$ が成り立つことを示せ。

(2)　$f(x)$ を求めよ。

(3)　方程式 $f(x)=0$ は，$0<x<\pi$ の範囲でただ 1 つの解をもつことを示せ。

(4)　(3)のただ 1 つの解を α とする。曲線 $y=f(x)$ $(0\leqq x\leqq\alpha)$，x 軸および y 軸によって囲まれる部分の面積を S_1 とし，曲線 $y=f(x)$ $(\alpha\leqq x\leqq\pi)$，x 軸および直線 $x=\pi$ によって囲まれる部分の面積を S_2 とする。S_1 と S_2 の大小を判定せよ。

4

解答解説のページへ

i を虚数単位とし，複素数 z に対して，$w=z^2+2z+1-2i$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) w の実部が 0 となる複素数 z 全体を複素数平面上に図示せよ。

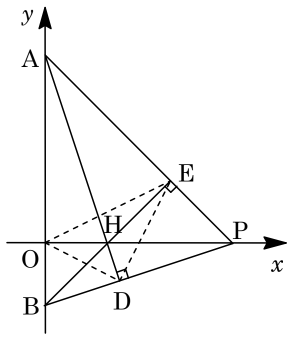
(2) $w=0$ を満たす複素数 z の個数は 2 個であることを証明し，それぞれを $a+bi$（$a,\ b$ は実数）の形に書き表せ。

(3) (2)で求めた 2 つの複素数のうち実部の大きい方を α，実部の小さい方を β とし，対応する複素数平面上の点をそれぞれ A，B とする。また，線分 AB の中点を M とする。複素数 z に対応する複素数平面上の点が，線分 AM 上（両端を含む）を動くとき，複素数 w の描く図形を複素数平面上に図示せよ。

(4) 複素数 z に対応する複素数平面上の点が，点 A を通り線分 AB に垂直な直線上を動くとき，複素数 w の描く図形を複素数平面上に図示せよ。

5

解答解説のページへ



原点を O とする座標平面上において，点 A(0, 3)，B(0, −1) および x 軸上の正の部分を動く点 P(t, 0) があり，∠APB は鈍角でないとする。△ABP の垂心を H，頂点 A から辺 BP に下ろした垂線と辺 BP との交点を D，頂点 B から辺 PA に下ろした垂線と辺 PA との交点を E とする。次の問いに答えよ。ただし，三角形の各頂点から対辺，またはその延長に下ろした 3 本の垂線は 1 点で交わることが知られている。この交点のことを，三角形の垂心という。

(1)　∠APB が直角となる t の値を求めよ。

(2)　点 H の座標を t を用いて表せ。

以下では，t が(1)で求めた値よりも大きい値をとるとする。

(3)　点 H が△ODE の内心であることを証明せよ。ただし，1 組の対角の和が $180°$ である四角形は円に内接することを，証明なしに利用してもよい。

(4)　△ODE の内接円の半径を t の関数 $f(t)$ として表せ。

(5)　(4)で求めた関数 $f(t)$ は最大値をもつことを示せ。ただし，最大値を与える t の値を求める必要はない。

1　問題のページへ

(1)　数列$\{a_n\}$は初項$a>0$，公比$r>0$の等比数列より，$a_n=ar^{n-1}\cdots\cdots\cdots$①

さて，数列$\{b_n\}$に対し，$b_1=a_1$，$b_{n+1}=b_na_{n+1}$より，$n\geqq 2$で①を用いて，

$$b_n=b_1a_2a_3\cdots a_n=a_1a_2a_3\cdots a_n=a\cdot ar\cdot ar^2\cdot\cdots\cdot ar^{n-1}=a^nr^{1+2+\cdots+(n-1)}$$

$$=a^nr^{\frac{1}{2}n(n-1)}\cdots\cdots\cdots②$$

なお，$n=1$のとき，②は$b_1=a^1r^0=a$となり成立している。

(2)　条件より，$c_n=\dfrac{\log_2 b_n}{n}$に対して，②から，

$$c_n=\frac{1}{n}\log_2 a^nr^{\frac{1}{2}n(n-1)}=\frac{1}{n}\log_2 a^n+\frac{1}{n}\log_2 r^{\frac{1}{2}n(n-1)}$$

$$=\log_2 a+\frac{1}{2}(n-1)\log_2 r\cdots\cdots\cdots③$$

これより，$c_{n+1}-c_n=\left(\log_2 a+\dfrac{1}{2}n\log_2 r\right)-\left(\log_2 a+\dfrac{1}{2}(n-1)\log_2 r\right)=\dfrac{1}{2}\log_2 r$

となり，数列$\{c_n\}$は公差$\dfrac{1}{2}\log_2 r$の等差数列である。

(3)　$M_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c_k$なので，③から$M_n=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{c_1+c_n}{2}\cdot n=\dfrac{c_1+c_n}{2}$となり，

$$M_n=\frac{1}{2}\left\{\log_2 a+\log_2 a+\frac{1}{2}(n-1)\log_2 r\right\}=\log_2 a+\frac{1}{4}(n-1)\log_2 r\cdots\cdots④$$

すると，$d_n=2^{M_n}$に対して，④より，

$$d_n=2^{\log_2 a+\frac{1}{4}(n-1)\log_2 r}=2^{\log_2 a}\cdot 2^{\log_2 r^{\frac{1}{4}(n-1)}}=ar^{\frac{1}{4}(n-1)}$$

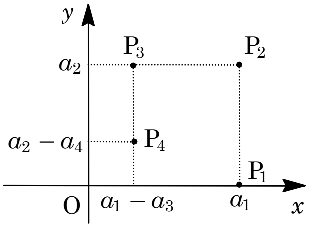
これより，$\dfrac{d_{n+1}}{d_n}=\dfrac{ar^{\frac{1}{4}n}}{ar^{\frac{1}{4}(n-1)}}=r^{\frac{1}{4}}$となり，数列$\{d_n\}$は公比$r^{\frac{1}{4}}$の等比数列である。

［解　説］

漸化式と等差数列・等比数列の融合問題です。完答へのネックになるのは，(1)の漸化式の解法ですが，ここは「ピンポイント レクチャー」を参照してください。

$\boxed{2}$

問題のページへ



(1)　1 から N までの数が 1 つずつ書かれた N 枚のカードから，もとに戻しながら 1 枚ずつ 4 回取り出し，取り出したカードの数を a_1，a_2，a_3，a_4 とする。そして，座標平面上に 4 点 $P_1(a_1,\ 0)$，$P_2(a_1,\ a_2)$，$P_3(a_1-a_3,\ a_2)$，$P_4(a_1-a_3,\ a_2-a_4)$を定める。

さて，P_4 が原点 O に一致するのは，$(a_1-a_3,\ a_2-a_4)=(0,\ 0)$ より，

$$a_3=a_1,\ a_4=a_2$$

このとき，$(a_1,\ a_3)$，$(a_2,\ a_4)$の組合せは，それぞれ N 通りずつなので，求める確率は，$\dfrac{N^2}{N^4}=\dfrac{1}{N^2}$ である。

(2)　P_4 が $x\geqq 0$，$y\leqq 0$ の表す領域にあるのは，$a_1-a_3\geqq 0$，$a_2-a_4\leqq 0$ より，

$$a_3\leqq a_1,\ a_2\leqq a_4$$

ここで，$a_1=k\ (1\leqq k\leqq N)$ のとき a_3 は k 通りあるので，$(a_1,\ a_3)$の組合せは，

$$\sum_{k=1}^{N}k=\frac{1}{2}N(N+1)\ \text{（通り）}$$

同様に，$(a_4,\ a_2)$の組合せも $\dfrac{1}{2}N(N+1)$ 通りなので，求める確率は，

$$\frac{\left\{\frac{1}{2}N(N+1)\right\}^2}{N^4}=\frac{(N+1)^2}{4N^2}$$

(3)　P_4 が $y=x$ 上にあるのは，$a_2-a_4=a_1-a_3$ より，$a_2-a_4=a_1-a_3=k$ とおくと，$0\leqq k\leqq N-1$ のもとで，

$$(a_1,\ a_3)=(k+1,\ 1),\ (k+2,\ 2),\ \cdots,\ (N,\ N-k)$$
$$(a_2,\ a_4)=(k+1,\ 1),\ (k+2,\ 2),\ \cdots,\ (N,\ N-k)$$

これより，$N-k$ 通りずつとなり，$(a_1,\ a_3,\ a_2,\ a_4)$の組合せは，

$$\sum_{k=0}^{N}(N-k)^2=\sum_{l=0}^{N}l^2=\frac{1}{6}N(N+1)(2N+1)\ \text{（通り）}$$

また，$1-N\leqq k\leqq -1$ のもとでは，

$$(a_1,\ a_3)=(1,\ 1-k),\ (2,\ 2-k),\ \cdots,\ (N+k,\ N)$$
$$(a_2,\ a_4)=(1,\ 1-k),\ (2,\ 2-k),\ \cdots,\ (N+k,\ N)$$

これより，$N+k$ 通りずつとなり，$(a_1,\ a_3,\ a_2,\ a_4)$の組合せは，

$$\sum_{k=1-N}^{-1}(N+k)^2=\sum_{l=1}^{N-1}l^2=\frac{1}{6}(N-1)N(2N-1)\ \text{（通り）}$$

すると，$1-N\leqq k\leqq N-1$ における$(a_1,\ a_3,\ a_2,\ a_4)$の組合せは，

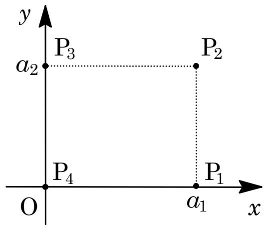
$$\frac{1}{6}N(N+1)(2N+1)+\frac{1}{6}(N-1)N(2N-1)=\frac{1}{3}N(2N^2+1)\ \text{（通り）}$$

よって，求める確率は，$\dfrac{\frac{1}{3}N(2N^2+1)}{N^4}=\dfrac{2N^2+1}{3N^3}$ である。

(4)　$N=2^m$ のとき，P_4 が原点 O に一致することより，

$(a_1,\ a_3)=(1,\ 1),\ (2,\ 2),\ \cdots,\ (2^m,\ 2^m)$

$(a_2,\ a_4)=(1,\ 1),\ (2,\ 2),\ \cdots,\ (2^m,\ 2^m)$



このとき，四角形 $P_1P_2P_3P_4$ は長方形となり，その面積が 2^m から，$a_1a_2=2^m$ が成り立つので，

$(a_1,\ a_2)=(1,\ 2^m),\ (2,\ 2^{m-1}),\ (2^2,\ 2^{m-2})\ \ \cdots,\ (2^m,\ 1)$

すると，$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)$ の組合せは $m+1$ 通りとなり，求める確率は，

$$\frac{m+1}{(2^m)^4}=\frac{m+1}{2^{4m}}$$

［解 説］

確率の標準的な問題です。丁寧に数え上げることがポイントになります。なお，(3)については，$k<0$ のときも場合分けをしましたが，対称性から $k>0$ と同様としても構わないでしょう。$k=0$ の場合は(1)で求めているわけですし。

3

問題のページへ

(1) 連続関数 $f(x)$ は，$f(x)=(1-x)\cos x+x\sin x-\int_0^x e^{x-t}f(t)\,dt$ を満たし，

$$f(x)=(1-x)\cos x+x\sin x-e^x\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt\cdots\cdots\cdots①$$

すると，$f(0)=\cos 0=1$ となり，①の両辺を微分すると，

$$f'(x)=-\cos x-(1-x)\sin x+\sin x+x\cos x-e^x\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt-e^xe^{-x}f(x)$$

$$=(x-1)\cos x+x\sin x-e^x\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt-f(x)\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$f(x)+e^x\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt=(1-x)\cos x+x\sin x$ なので，②に代入して，

$$f'(x)=(x-1)\cos x+x\sin x-(1-x)\cos x-x\sin x=2(x-1)\cos x\cdots\cdots\cdots③$$

(2) ③より，$f(x)=\int 2(x-1)\cos x\,dx$ となり，C を定数として，

$$f(x)=2(x-1)\sin x-2\int\sin x\,dx=2(x-1)\sin x+2\cos x+C$$

ここで，$f(0)=1$ から，$2+C=1$ すなわち $C=-1$ となり，

$$f(x)=2(x-1)\sin x+2\cos x-1$$

(3) ③より，$0\leqq x\leqq\pi$ での $f(x)$ の増減は右表のようになる。

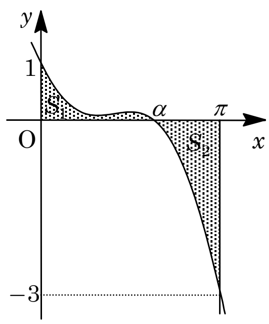
x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	-3

ここで，$1<\frac{\pi}{3}$ に注意すると，

$$\cos 1>\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

すると，$f(1)=2\cos 1-1>2\cdot\frac{1}{2}-1=0$ となり，方程式 $f(x)=0$ は，$0<x<\pi$ の範囲でただ 1 つの解をもつ。

(4) $f(\alpha)=0$ として，右図の網点部の面積を S_1，S_2 とすると，



$$S_1=\int_0^\alpha f(x)\,dx,\quad S_2=-\int_\alpha^\pi f(x)\,dx \text{ となり，}$$

$$S_1-S_2=\int_0^\alpha f(x)\,dx+\int_\alpha^\pi f(x)\,dx=\int_0^\pi f(x)\,dx$$

$$=\int_0^\pi\{2(x-1)\sin x+2\cos x-1\}\,dx$$

$$=-2\big[(x-1)\cos x\big]_0^\pi+2\int_0^\pi\cos x\,dx+0-\pi$$

$$=2(\pi-1)-2+0-\pi=\pi-4<0$$

よって，$S_1<S_2$ である。

［解 説］

微積分の総合問題です。微分型の積分方程式を解くことから始め，面積計算へと繋ぐ構図になっています。いずれも，頻出題です。

4

問題のページへ

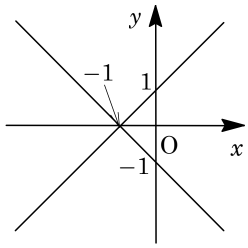
(1)　複素数 w, z に対し，$w = z^2 + 2z + 1 - 2i = (z+1)^2 - 2i$ ………①

まず，$z = x + yi$ （x, y は実数）とおくと，①より，

$$w = (x+1+yi)^2 - 2i = (x+1)^2 + 2(x+1)yi - y^2 - 2i$$
$$= (x+1)^2 - y^2 + 2(xy + y - 1)i \text{ ………②}$$

w の実部が 0 から，$(x+1)^2 - y^2 = 0$ となり，

$$y = \pm(x+1)$$



複素数平面上に図示すると，右図の 2 直線となる。

(2)　$w = 0$ のとき，②より，$y = \pm(x+1)$ のもとで，

$$xy + y - 1 = 0,\ (x+1)y - 1 = 0 \text{ ………③}$$

(i)　$y = x + 1$ のとき　③より $y^2 - 1 = 0$ となり，$y = \pm 1$ から，

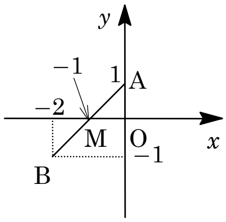
$$(x,\ y) = (0,\ 1),\ (-2,\ -1)$$

(ii)　$y = -(x+1)$ のとき　③より $-y^2 - 1 = 0$ となり，実数 y は存在しない。

(i)(ii)より，$z = i$，$z = -2 - i$ である。

(3)　$\alpha = i$，$\beta = -2 - i$ に対し，$\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$ を設定する。そして，線分 AB の中点を $\mathrm{M}(\gamma)$ とおくと，

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2} = -1$$

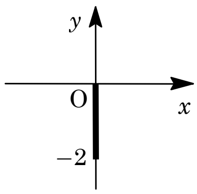


さて，z に対応する点が線分 AM 上を動くとき，

$$z = t\alpha + (1-t)\gamma = t - 1 + ti \quad (0 \leqq t \leqq 1)$$

①より，$w = \{(t - 1 + ti) + 1\}^2 - 2i$ となり，

$$w = t^2(1+i)^2 - 2i = (2t^2 - 2)i$$



すると，$-2 \leqq 2t^2 - 2 \leqq 0$ より，w の描く図形は右図の原点と点 $-2i$ を結ぶ線分（太線部）である。

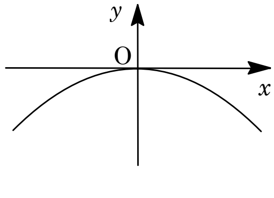
(4)　z に対応する点が点 A を通り線分 AB に垂直な直線上を動くとき，

$$z = s + (-s+1)i \quad (s \text{ は実数})$$

①より，$w = \{s + (-s+1)i + 1\}^2 - 2i$ となり，

$$w = (s+1)^2 - 2(s^2-1)i - (-s+1)^2 - 2i = 4s - 2s^2 i$$

ここで，$w = x + yi$ とおくと，$x = 4s$，$y = -2s^2$

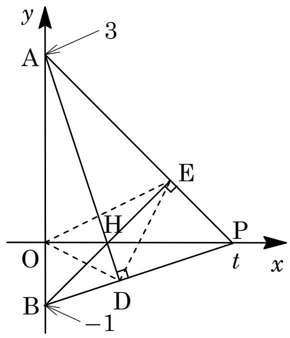


これより，$y = -2\left(\dfrac{x}{4}\right)^2 = -\dfrac{x^2}{8}$ となり，w の描く図形は右図の放物線である。

［解　説］

複素数平面上の変換についての基本題です。同じような設問が続きますが。

5　　　　問題のページへ



(1)　$t>0$ のとき，$\mathrm{A}(0,\ 3)$，$\mathrm{B}(0,\ -1)$，$\mathrm{P}(t,\ 0)$ に対し，直線 AP の傾きは $\dfrac{-3}{t}$，直線 BP の傾きは $\dfrac{1}{t}$ なので，$\angle\mathrm{APB}$ が直角の条件は,

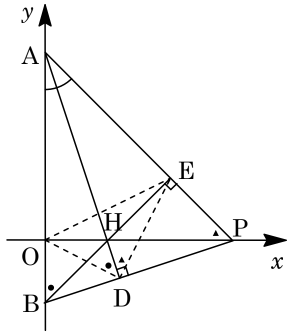
$$\frac{-3}{t}\cdot\frac{1}{t}=-1,\ t^2=3$$

よって，$t>0$ から $t=\sqrt{3}$ である。

(2)　$\mathrm{AD}\perp\mathrm{BP}$ より，直線 AD は傾き $-t$ から，その方程式は,

$$y=-tx+3\cdots\cdots\cdots①$$

直線 AD と OP の交点が△ABP の垂心 H なので，$0=-tx+3$ より $x=\dfrac{3}{t}$ となり，$\mathrm{H}\left(\dfrac{3}{t},\ 0\right)$ である。



(3)　$t>\sqrt{3}$ のとき，$\angle\mathrm{APB}$ は鋭角となる。

さて，$\angle\mathrm{BOH}+\angle\mathrm{BDH}=180^\circ$ より，四角形 OBDH は円に内接するので,

$$\angle\mathrm{ADO}=\angle\mathrm{ABE}\cdots\cdots\cdots②$$

また，$\angle\mathrm{PEH}+\angle\mathrm{PDH}=180^\circ$ より，四角形 PEHD は円に内接するので,

$$\angle\mathrm{ADE}=\angle\mathrm{APO}\cdots\cdots\cdots③$$

さらに，△ABE と△AOP はともに直角三角形なので,

$$\angle\mathrm{ABE}=90^\circ-\angle\mathrm{BAP}=\angle\mathrm{APO}\cdots\cdots\cdots④$$

②③④より，$\angle\mathrm{ADO}=\angle\mathrm{ADE}$ となり，直線 AD は $\angle\mathrm{ODE}$ の二等分線である。

同様にすると，直線 BE は $\angle\mathrm{OED}$ の二等分線である。

以上より，直線 AD と BE の交点 H は，△ODE の内心になる。

(4)　まず，直線 BP の方程式は，$y=\dfrac{1}{t}x-1\cdots\cdots\cdots⑤$

①⑤を連立して，$-tx+3=\dfrac{1}{t}x-1$ より，$\dfrac{t^2+1}{t}x=4$ となり,

$$x=\frac{4t}{t^2+1},\ y=-\frac{4t^2}{t^2+1}+3=-\frac{t^2-3}{t^2+1}$$

これより，$\mathrm{D}\left(\dfrac{4t}{t^2+1},\ -\dfrac{t^2-3}{t^2+1}\right)$ となり，直線 OD の方程式は,

$$y=-\frac{t^2-3}{4t}x,\ (t^2-3)x+4ty=0$$

すると，△ODE の内接円の半径 $f(t)$ は，$\mathrm{H}\left(\dfrac{3}{t},\ 0\right)$ と直線 OD の距離になり，$t>\sqrt{3}$ から,

$$f(t)=\frac{\left|(t^2-3)\cdot\dfrac{3}{t}\right|}{\sqrt{(t^2-3)^2+16t^2}}=\frac{3(t^2-3)}{t\sqrt{(t^2-3)^2+16t^2}}=\frac{3(t^2-3)}{t\sqrt{t^4+10t^2+9}}\cdots\cdots\cdots⑥$$

(5)　まず，$s=t^2-3$ とおくと，$t>\sqrt{3}$ より $s>0$ となる。

⑥より，$f(t)=3\sqrt{\dfrac{(t^2-3)^2}{t^2\{(t^2-3)^2+16t^2\}}}$ と変形し，$f(t)=3\sqrt{g(s)}$ とおくと，

$$g(s)=\frac{s^2}{(s+3)\{s^2+16(s+3)\}}=\frac{s^2}{(s+3)(s+4)(s+12)}$$

すると，$g(s)$ は $s>0$ で $g(s)>0$ である連続な関数で，しかも $\lim\limits_{s\to+0}g(s)=0$ かつ $\lim\limits_{s\to\infty}g(s)=0$ なので，$s>0$ において最大値をもつ。

したがって，$t>\sqrt{3}$ において $f(t)$ は最大値をもつ。

［解　説］

三角形の垂心と内心を題材にした図形と式の問題です。(3)はいろいろな解法が考えられますが，問題文の誘導に従ったもので記述しています。なお，理系単独の(5)については，問題文の微妙な表現のため，初めに作った解答例で記述しています。とはいえ，実は迷ってしまい，対数微分をして延々計算をし，増減表を書いたりもしたのですが……。