1

解答解説のページへ

a を実数とする。関数 $f(x)=-\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{2a+1}{2}x^2-ax$ が $x=a$ で極大値をとるとき，次の問いに答えよ。

(1)　a の満たす条件を求めよ。

(2)　次の不等式を解け。　$|x+1|+|x-2|\leqq 4$

(3)　x が(2)の範囲を動くとき，$f(x)$ の最大値と最小値を a を用いて表せ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

座標平面において，2 つの放物線 $y=x^2$， $y=-\sqrt{2}x^2+3x+\sqrt{2}$ 上にそれぞれ点 A$(1,\ 1)$，点 C$(\sqrt{2}-1,\ \sqrt{2}+1)$ をとる。次の問いに答えよ。

(1) 放物線 $y=x^2$ 上に点 A と異なる点 B があり，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ は垂直であるとする。このとき，B の座標を求めよ。

(2) 放物線 $y=-\sqrt{2}x^2+3x+\sqrt{2}$ 上に点 C と異なる点 D があり，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ は垂直であるとする。このとき，D の座標を求めよ。

(3) B, D はそれぞれ(1), (2)で定めたものとする。このとき，四角形 ABCD が正方形であることを示せ。

3

解答解説のページへ

1 個のさいころを 3 回投げる。1 回目に出た目の数を a, 2 回目に出た目の数を b, 3 回目に出た目の数を c とする。また, $f(x)=(-1)^a x^2+bx+c$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$b^2>4c$ である確率を求めよ。

(2)　2 次方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつ確率を求めよ。

(3)　2 次方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき, $f'(1)=1$ である条件付き確率を求めよ。

4

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　$A=\sin x$ とおく。$\sin 5x$ を A の整式で表せ。

(2)　$\sin^2\dfrac{\pi}{5}$ の値を求めよ。

(3)　曲線 $y=\cos 3x\ (x \geqq 0)$ と曲線 $y=\cos 7x\ (x \geqq 0)$ の共有点の x 座標を小さい方から順に x_1，x_2，x_3，$\cdots$ とする。このとき関数 $y=\cos 3x\ (x_5 \leqq x \leqq x_6)$ の値域を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$f(x)=-\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{2a+1}{2}x^2-ax$ に対して，

$$f'(x)=-2x^2+(2a+1)x-a$$
$$=-(2x-1)(x-a)$$

x	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

$f(x)$ が $x=a$ で極大値をとる条件は，$f'(x)$の符号が$x=a$の前後で正から負に変化することなので，$a>\dfrac{1}{2}$である。

(2)　不等式$|x+1|+|x-2|\leqq 4$ ……(*)に対して，

(i)　$x<-1$のとき　$-(x+1)-(x-2)\leqq 4$ より $-2x\leqq 3$ となり，$x\geqq -\dfrac{3}{2}$

これより，(*)は$-\dfrac{3}{2}\leqq x<-1$で満たされている。

(ii)　$-1\leqq x<2$のとき　$(x+1)-(x-2)\leqq 4$ より $3\leqq 4$ となり，つねに成立。

これより，(*)は$-1\leqq x<2$で満たされている。

(iii)　$x\geqq 2$のとき　$(x+1)+(x-2)\leqq 4$ より $2x\leqq 5$ となり，$x\leqq \dfrac{5}{2}$

これより，(*)は$2\leqq x\leqq \dfrac{5}{2}$で満たされている。

(i)〜(iii)より，(*)の解は$-\dfrac{3}{2}\leqq x\leqq \dfrac{5}{2}$である。

(3)　$-\dfrac{3}{2}\leqq x\leqq \dfrac{5}{2}$における$f(x)$の最大値と最小値について，$f(a)=\dfrac{1}{3}a^3-\dfrac{1}{2}a^2$

$$f\Big(-\frac{3}{2}\Big)=\frac{15}{4}a+\frac{27}{8},\ f\Big(\frac{1}{2}\Big)=-\frac{a}{4}+\frac{1}{24},\ f\Big(\frac{5}{2}\Big)=\frac{15}{4}a-\frac{175}{24}$$

(i)　$a\geqq \dfrac{5}{2}$のとき

$f(x)$の増減は右表で，$f\Big(-\dfrac{3}{2}\Big)>f\Big(\dfrac{5}{2}\Big)$から，$f(x)$の最大値は$f\Big(-\dfrac{3}{2}\Big)=\dfrac{15}{4}a+\dfrac{27}{8}$，最小値は$f\Big(\dfrac{1}{2}\Big)=-\dfrac{a}{4}+\dfrac{1}{24}$である。

x	$-\frac{3}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{5}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$-$
$f(x)$		↘		↗	

(ii)　$\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{5}{2}$のとき

$f(x)$の増減は右表で，最大値について，$D_1=f(a)-f\Big(-\dfrac{3}{2}\Big)$とおくと，

x	$-\frac{3}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	a	$\cdots$	$\frac{5}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘		↗		↘	

$$D_1=\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a^2-\frac{15}{4}a-\frac{27}{8},\ D_1'=a^2-a-\frac{15}{4}=\frac{1}{4}(2a+3)(2a-5)$$

すると，$\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{5}{2}$において$D_1'<0$から$D_1$は単調に減少する。$a=\dfrac{1}{2}$のとき$D_1=-\dfrac{16}{3}<0$なので，$D_1<0$すなわち$f(a)<f\Big(-\dfrac{3}{2}\Big)$である。

これより，$f(x)$の最大値は$f\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{15}{4}a+\dfrac{27}{8}$である。

また，最小値について，$D_2=f\left(\dfrac{1}{2}\right)-f\left(\dfrac{5}{2}\right)$とおくと，

$$D_2=-\frac{a}{4}+\frac{1}{24}-\frac{15}{4}a+\frac{175}{24}=-4a+\frac{22}{3}=-4\left(a-\frac{11}{6}\right)$$

(ii-i)　$D_2\geqq 0\left(\dfrac{1}{2}<a\leqq\dfrac{11}{6}\right)$のとき

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)\geqq f\left(\dfrac{5}{2}\right)$より，$f(x)$の最小値は$f\left(\dfrac{5}{2}\right)=\dfrac{15}{4}a-\dfrac{175}{24}$である。

(ii-i)　$D_2<0\left(\dfrac{11}{6}<a\leqq\dfrac{5}{2}\right)$のとき

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)<f\left(\dfrac{5}{2}\right)$より，$f(x)$の最小値は$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{a}{4}+\dfrac{1}{24}$である。

(i)(ii)より，$f(x)$の最大値は$\dfrac{15}{4}a+\dfrac{27}{8}$であり，最小値は,

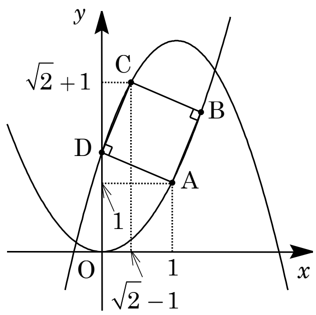
$$-\frac{a}{4}+\frac{1}{24}\left(\frac{11}{6}<a\text{ のとき}\right),\ \frac{15}{4}a-\frac{175}{24}\left(\frac{1}{2}<a\leqq\frac{11}{6}\text{ のとき}\right)$$

［解　説］

微分と最大・最小についての問題です。内容は標準的ですが，ただ数値計算がかなり煩雑です。

$\boxed{2}$

問題のページへ



(1) 放物線 $y=x^2$ ……① 上に点 A$(1,\ 1)$，放物線 $y=-\sqrt{2}x^2+3x+\sqrt{2}$ ……②上に点 C$(\sqrt{2}-1,\ \sqrt{2}+1)$ がある。このとき放物線①上に，点 A と異なる点 B$(t,\ t^2)$ $(t\neq 1)$ を，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ が垂直になるようにとると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(t-1,\ t^2-1)=(t-1)(1,\ t+1)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=(t-\sqrt{2}+1,\ t^2-\sqrt{2}-1)$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=0$ から，

$$(t-\sqrt{2}+1)+(t+1)(t^2-\sqrt{2}-1)=0$$

まとめると，$t^3+t^2-\sqrt{2}t-2\sqrt{2}=0$ となり，

$$(t-\sqrt{2})\{t^2+(\sqrt{2}+1)t+2\}=0\cdots\cdots\cdots③$$

$t^2+(\sqrt{2}+1)t+2=0$ は，$D=(\sqrt{2}+1)^2-8=2\sqrt{2}-5<0$ より実数解をもたないので，③の実数解は $t=\sqrt{2}$ となり，これより B$(\sqrt{2},\ 2)$ である。

(2) 放物線②上に，点 C と異なる点 D$(s,\ -\sqrt{2}s^2+3s+\sqrt{2})$ $(s\neq\sqrt{2}-1)$ を，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ が垂直になるようにとると，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(s-1,\ -\sqrt{2}s^2+3s+\sqrt{2}-1)$

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(s-\sqrt{2}+1,\ -\sqrt{2}s^2+3s+\sqrt{2}-\sqrt{2}-1)$$
$$=(s-\sqrt{2}+1)(1,\ -\sqrt{2}s+\sqrt{2}+1)$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$ から，

$$(s-1)+(-\sqrt{2}s^2+3s+\sqrt{2}-1)(-\sqrt{2}s+\sqrt{2}+1)=0$$

まとめると，$s^3-(2\sqrt{2}+1)s^2+(2\sqrt{2}+1)s=0$ となり，

$$s\{s^2-(2\sqrt{2}+1)s+2\sqrt{2}+1\}=0\cdots\cdots\cdots④$$

$s^2-(2\sqrt{2}+1)s+2\sqrt{2}+1=0$ は，$D=(2\sqrt{2}+1)^2-4(2\sqrt{2}+1)=5-4\sqrt{2}<0$ より実数解をもたないので，④の実数解は $s=0$ となり，これより D$(0,\ \sqrt{2})$ である。

(3) (1)(2)より，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(\sqrt{2}-1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(-1,\ \sqrt{2}-1)$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=-(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}-1)=0$$

これより，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ は垂直になり，四角形 ABCD は長方形である。

さらに，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2+1}$ から，四角形 ABCD は正方形である。

［解　説］

放物線を題材にした問題です。平易な内容であるものの，計算量はかなりのもので，時間を費やしてしまいます。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1)　さいころを 3 回投げ，出た目の数を順に a, b, c とする。

ここで，$b^2 > 4c$ となるのは，$c = 1$，2 のとき $3 \leqq b \leqq 6$ で 4 通りずつ，$c = 3$ のとき $4 \leqq b \leqq 6$ で 3 通り，$c = 4$，5，6 のとき $5 \leqq b \leqq 6$ で 2 通りずつである。

a は任意なので，求める確率は，$\dfrac{6\times(4\times2+3+2\times3)}{6^3} = \dfrac{17}{36}$ である。

(2)　$f(x) = (-1)^a x^2 + bx + c$ に対し，$f(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつのは，

(i)　a が偶数($a = 2$，4，6)のとき　$f(x) = x^2 + bx + c$

$D > 0$ ($b^2 - 4c > 0$) から，$3\times(4\times2+3+2\times3) = 3\times17$ 通りの場合がある。

(ii)　a が奇数($a = 1$，3，5)のとき　$f(x) = -x^2 + bx + c$

$D > 0$ ($b^2 + 4c > 0$) から，任意の b, c で成り立ち，3×6^2 通りの場合がある。

(i)(ii)より，求める確率は，$\dfrac{3\times17+3\times6^2}{6^3} = \dfrac{53}{72}$ である。

(3)　$f'(x) = 2(-1)^a x + b$ となり，$f'(1) = 1$ より $2(-1)^a + b = 1$ ………(＊)

ここで，$f(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもち，かつ $f'(1) = 1$ を満たすのは，

(i)　a が偶数($a = 2$，4，6)のとき

(＊)より $2 + b = 1$ となるので満たす b は存在せず，この場合はない。

(ii)　a が奇数($a = 1$，3，5)のとき

(＊)より $-2 + b = 1$ となるので $b = 3$ である。また $D > 0$ はつねに成り立つので c は任意となり，$3\times1\times6 = 18$ 通りの場合がある。

(i)(ii)より，$f(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもち，かつ $f'(1) = 1$ を満たす確率は，

$$\frac{0+18}{6^3} = \frac{1}{12}$$

以上より，求める条件付き確率は，$\dfrac{1}{12} \div \dfrac{53}{72} = \dfrac{6}{53}$ である。

［解　説］

確率の基本問題です。題材も頻出タイプです。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1) $\sin 5x = \sin(3x+2x) = \sin 3x\cos 2x + \cos 3x\sin 2x$

$$= (3\sin x - 4\sin^3 x)(1-2\sin^2 x) + (4\cos^3 x - 3\cos x)\cdot 2\sin x\cos x$$
$$= (3\sin x - 4\sin^3 x)(1-2\sin^2 x) + 2\sin x\cos^2 x(4\cos^2 x - 3)$$

ここで，$A = \sin x$ とおくと，

$$\sin 5x = (3A-4A^3)(1-2A^2) + 2A(1-A^2)(4-4A^2-3)$$
$$= (3A-10A^3+8A^5) + 2A(1-5A^2+4A^4) = 16A^5 - 20A^3 + 5A$$

(2) $A = \sin\dfrac{\pi}{5}$ とおくと，(1)より $\sin\pi = 16A^5 - 20A^3 + 5A$ となり，$A \neq 0$ から，

$$16A^5 - 20A^3 + 5A = 0,\ 16A^4 - 20A^2 + 5 = 0$$

$A^2 = \dfrac{10\pm\sqrt{20}}{16} = \dfrac{5\pm\sqrt{5}}{8}$ となり，$0 < A < \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ から $0 < A^2 < \dfrac{1}{2}$ なので，

$$A^2 = \sin^2\frac{\pi}{5} = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$$

(3) $x \geqq 0$ において，曲線 $y = \cos 3x$ ……①と曲線 $y = \cos 7x$ ……②を連立すると，

$$\cos 7x - \cos 3x = 0,\ -2\sin 5x\sin 2x = 0$$

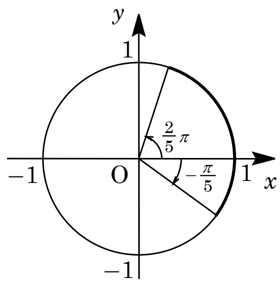
これより，n を 0 以上の整数として，$5x = n\pi$ または $2x = n\pi$ より，$x = \dfrac{n}{5}\pi,\ \dfrac{n}{2}\pi$

曲線①と曲線②の共有点を x 座標の小さい方から並べ x_1，x_2，x_3，…とすると，

$$x_1 = 0,\ x_2 = \frac{\pi}{5},\ x_3 = \frac{2}{5}\pi,\ x_4 = \frac{\pi}{2},\ x_5 = \frac{3}{5}\pi,\ x_6 = \frac{4}{5}\pi$$

さて，関数 $y = \cos 3x\ \left(\dfrac{3}{5}\pi \leqq x \leqq \dfrac{4}{5}\pi\right)$ に対して，$\dfrac{9}{5}\pi \leqq 3x \leqq \dfrac{12}{5}\pi$ となり，

$$\cos\frac{12}{5}\pi = \cos\frac{2}{5}\pi < \cos\frac{\pi}{5} = \cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) = \cos\frac{9}{5}\pi$$



これより，$\cos\dfrac{2}{5}\pi \leqq y \leqq 1$ となり，(2)から，

$$\cos\frac{2}{5}\pi = 1 - 2\sin^2\frac{\pi}{5} = 1 - 2\cdot\frac{5-\sqrt{5}}{8} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

よって，$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} \leqq y \leqq 1$ である。

［解　説］

三角関数の公式適用の問題です。(3)の結論まで，丁寧な誘導がついています。