$\boxed{1}$

解答解説のページへ

a を実数とする。関数 $f(x)=-\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{2a+1}{2}x^2-ax$ が $x=a$ で極大値をとるとき，次の問いに答えよ。

(1)　a の満たす条件を求めよ。

(2)　次の不等式を解け。　$|x+1|+|x-2|\leqq 4$

(3)　x が(2)の範囲を動くとき，$f(x)$ の最大値と最小値を a を用いて表せ。

2

解答解説のページへ

座標平面において，2 つの放物線 $y=x^2$， $y=-\sqrt{2}x^2+3x+\sqrt{2}$ 上にそれぞれ点 $\mathrm{A}(1,\ 1)$，点 $\mathrm{C}(\sqrt{2}-1,\ \sqrt{2}+1)$ をとる。次の問いに答えよ。

(1) 放物線 $y=x^2$ 上に点 A と異なる点 B があり，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ は垂直であるとする。このとき，B の座標を求めよ。

(2) 放物線 $y=-\sqrt{2}x^2+3x+\sqrt{2}$ 上に点 C と異なる点 D があり，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ は垂直であるとする。このとき，D の座標を求めよ。

(3) B，D はそれぞれ(1)，(2)で定めたものとする。このとき，四角形 ABCD が正方形であることを示せ。

3

解答解説のページへ

1 個のさいころを 3 回投げる。1 回目に出た目の数を a, 2 回目に出た目の数を b, 3 回目に出た目の数を c とする。また，$f(x)=(-1)^a x^2+bx+c$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$b^2>4c$ である確率を求めよ。

(2)　2 次方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつ確率を求めよ。

(3)　2 次方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき，$f'(1)=7$ である条件付き確率を求めよ。

(4)　2 次方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき，少なくとも 1 つが正の解である条件付き確率を求めよ。

4

解答解説のページへ

a, b, c を実数とし，2 次方程式 $x^2+x-(c-1)=0$ が実数解 α, β $(\alpha<\beta)$ をもつとする。さらに，2 つの等式 $a+b=c^2$, $a\alpha+b\beta+c=0$ が成り立つとき，次の問いに答えよ。

(1) α, β および $b-a$ を，それぞれ c を用いて表せ。

以下において，a, b, c は自然数とする。

(2) $\sqrt{4c-3}$ が自然数でないとき，自然数 a, b, c の組を求めよ。

(3) 自然数 s を用いて，$4c-3=s^2$ と表せるとき，s と a は等式

$$s^5-s^4+6s^3+2s^2+(9-32a)s=-15$$

を満たすことを示せ。

(4) (3)のとき，自然数 a, b, c の組をすべて求めよ。

5

解答解説のページへ

座標平面において，曲線 $y=e^x$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ e^t)$ における法線を l とし，l と y 軸との交点を Q とする。$t\neq 0$ のとき，線分 PQ の中点を R とし，$t=0$ のときは $\mathrm{R}(0,\ 1)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 直線 l の方程式を求めよ。

(2) t が実数全体を動くとき，点 R の描く曲線 C の方程式を求めよ。

(3) (2)の曲線 C，y 軸，直線 $y=e^{-2}+e^2$ で囲まれた図形 F の面積を求めよ。

(4) (3)の図形 F を x 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積を求めよ。

6

解答解説のページへ

座標平面において，O(0, 0)，A(4, 0)，P(3, 0) とする。線分 OA に点 P で接する円 C を内接円とする△OAB を考える。ただし，円 C の中心は第 1 象限にあるとする。次の問いに答えよ。

(1) OB と AB の差は一定であることを証明せよ。

(2) 円 C の半径を r とするとき，r のとる値の範囲を求めよ。

(3) r が(2)の範囲で変化するとき，点 B の軌跡の方程式を求めよ。また，その概形をかけ。

1

問題のページへ

(1) $f(x)=-\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{2a+1}{2}x^2-ax$ に対して，

$$f'(x)=-2x^2+(2a+1)x-a$$
$$=-(2x-1)(x-a)$$

x	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$f(x)$ が $x=a$ で極大値をとる条件は，$f'(x)$の符号が$x=a$の前後で正から負に変化することなので，$a>\dfrac{1}{2}$ である。

(2) 不等式$|x+1|+|x-2|\leqq 4$ ……(＊)に対して，

(i) $x<-1$のとき　$-(x+1)-(x-2)\leqq 4$ より $-2x\leqq 3$ となり，$x\geqq -\dfrac{3}{2}$

これより，(＊)は$-\dfrac{3}{2}\leqq x<-1$ で満たされている。

(ii) $-1\leqq x<2$ のとき　$(x+1)-(x-2)\leqq 4$ より $3\leqq 4$ となり，つねに成立。

これより，(＊)は$-1\leqq x<2$ で満たされている。

(iii) $x\geqq 2$のとき　$(x+1)+(x-2)\leqq 4$ より $2x\leqq 5$ となり，$x\leqq\dfrac{5}{2}$

これより，(＊)は$2\leqq x\leqq\dfrac{5}{2}$ で満たされている。

(i)〜(iii)より，(＊)の解は$-\dfrac{3}{2}\leqq x\leqq\dfrac{5}{2}$ である。

(3) $-\dfrac{3}{2}\leqq x\leqq\dfrac{5}{2}$ における$f(x)$の最大値と最小値について，$f(a)=\dfrac{1}{3}a^3-\dfrac{1}{2}a^2$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{15}{4}a+\frac{27}{8},\ f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{a}{4}+\frac{1}{24},\ f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{15}{4}a-\frac{175}{24}$$

(i) $a\geqq\dfrac{5}{2}$ のとき

$f(x)$の増減は右表で，$f\left(-\dfrac{3}{2}\right)>f\left(\dfrac{5}{2}\right)$から，$f(x)$ の最大値は $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{15}{4}a+\dfrac{27}{8}$，最小値は$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{a}{4}+\dfrac{1}{24}$ である。

x	$-\frac{3}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{5}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$-$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

(ii) $\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{5}{2}$ のとき

$f(x)$の増減は右表で，最大値について，$D_1=f(a)-f\left(-\dfrac{3}{2}\right)$とおくと，

x	$-\frac{3}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	a	$\cdots$	$\frac{5}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

$$D_1=\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a^2-\frac{15}{4}a-\frac{27}{8},\ D_1{}'=a^2-a-\frac{15}{4}=\frac{1}{4}(2a+3)(2a-5)$$

すると，$\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{5}{2}$ において $D_1{}'<0$ から D_1 は単調に減少する。$a=\dfrac{1}{2}$ のとき$D_1=-\dfrac{16}{3}<0$ なので，$D_1<0$ すなわち$f(a)<f\left(-\dfrac{3}{2}\right)$である。

これより，$f(x)$ の最大値は $f\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{15}{4}a+\frac{27}{8}$ である。

また，最小値について，$D_2=f\left(\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{5}{2}\right)$ とおくと，

$$D_2=-\frac{a}{4}+\frac{1}{24}-\frac{15}{4}a+\frac{175}{24}=-4a+\frac{22}{3}=-4\left(a-\frac{11}{6}\right)$$

(ii-i)　$D_2 \geqq 0\left(\frac{1}{2}<a \leqq \frac{11}{6}\right)$ のとき

$f\left(\frac{1}{2}\right) \geqq f\left(\frac{5}{2}\right)$ より，$f(x)$ の最小値は $f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{15}{4}a-\frac{175}{24}$ である。

(ii-ii)　$D_2<0\left(\frac{11}{6}<a \leqq \frac{5}{2}\right)$ のとき

$f\left(\frac{1}{2}\right)<f\left(\frac{5}{2}\right)$ より，$f(x)$ の最小値は $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{a}{4}+\frac{1}{24}$ である。

(i)(ii)より，$f(x)$ の最大値は $\frac{15}{4}a+\frac{27}{8}$ であり，最小値は,

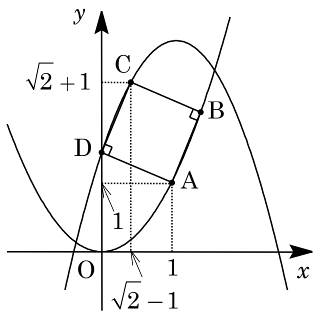
$$-\frac{a}{4}+\frac{1}{24}\left(\frac{11}{6}<a \text{ のとき}\right),\ \frac{15}{4}a-\frac{175}{24}\left(\frac{1}{2}<a \leqq \frac{11}{6} \text{ のとき}\right)$$

［解　説］

微分と最大・最小についての問題です。内容は標準的ですが，ただ数値計算がかなり煩雑です。

2

問題のページへ



(1) 放物線 $y=x^2$ ……① 上に点 $\mathrm{A}(1,\ 1)$，放物線 $y=-\sqrt{2}x^2+3x+\sqrt{2}$ ……②上に点 $\mathrm{C}(\sqrt{2}-1,\ \sqrt{2}+1)$ がある。このとき放物線①上に，点 A と異なる点 $\mathrm{B}(t,\ t^2)$ $(t\neq 1)$ を，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ が垂直になるようにとると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(t-1,\ t^2-1)=(t-1)(1,\ t+1)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=(t-\sqrt{2}+1,\ t^2-\sqrt{2}-1)$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=0$ から，

$$(t-\sqrt{2}+1)+(t+1)(t^2-\sqrt{2}-1)=0$$

まとめると，$t^3+t^2-\sqrt{2}t-2\sqrt{2}=0$ となり，

$$(t-\sqrt{2})\{t^2+(\sqrt{2}+1)t+2\}=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

$t^2+(\sqrt{2}+1)t+2=0$ は，$D=(\sqrt{2}+1)^2-8=2\sqrt{2}-5<0$ より実数解をもたないので，③の実数解は $t=\sqrt{2}$ となり，これより $\mathrm{B}(\sqrt{2},\ 2)$ である。

(2) 放物線②上に，点 C と異なる点 $\mathrm{D}(s,\ -\sqrt{2}s^2+3s+\sqrt{2})$ $(s\neq\sqrt{2}-1)$ を，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ が垂直になるようにとると，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(s-1,\ -\sqrt{2}s^2+3s+\sqrt{2}-1)$

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(s-\sqrt{2}+1,\ -\sqrt{2}s^2+3s+\sqrt{2}-\sqrt{2}-1)$$

$$=(s-\sqrt{2}+1)(1,\ -\sqrt{2}s+\sqrt{2}+1)$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$ から，

$$(s-1)+(-\sqrt{2}s^2+3s+\sqrt{2}-1)(-\sqrt{2}s+\sqrt{2}+1)=0$$

まとめると，$s^3-(2\sqrt{2}+1)s^2+(2\sqrt{2}+1)s=0$ となり，

$$s\{s^2-(2\sqrt{2}+1)s+2\sqrt{2}+1\}=0\ \cdots\cdots\cdots④$$

$s^2-(2\sqrt{2}+1)s+2\sqrt{2}+1=0$ は，$D=(2\sqrt{2}+1)^2-4(2\sqrt{2}+1)=5-4\sqrt{2}<0$ より実数解をもたないので，④の実数解は $s=0$ となり，これより $\mathrm{D}(0,\ \sqrt{2})$ である。

(3) (1)(2)より，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(\sqrt{2}-1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(-1,\ \sqrt{2}-1)$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=-(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}-1)=0$$

これより，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ は垂直になり，四角形 ABCD は長方形である。

さらに，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2+1}$ から，四角形 ABCD は正方形である。

［解　説］

放物線を題材にした問題です。平易な内容であるものの，計算量はかなりのもので，時間を費やしてしまいます。

$\boxed{3}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　問題のページへ

(1)　さいころを3回投げ，出た目の数を順に a, b, c とする。

ここで，$b^2 > 4c$ となるのは，$c = 1$，2のとき $3 \leqq b \leqq 6$ で 4 通りずつ，$c = 3$ のとき $4 \leqq b \leqq 6$ で3通り，$c = 4$，5，6のとき $5 \leqq b \leqq 6$ で2通りずつである。

a は任意なので，求める確率は，$\dfrac{6\times(4\times2+3+2\times3)}{6^3} = \dfrac{17}{36}$ である。

(2)　$f(x) = (-1)^a x^2 + bx + c$ に対し，$f(x) = 0$ が異なる2つの実数解をもつのは，

(i)　a が偶数($a = 2$，4，6)のとき　$f(x) = x^2 + bx + c$

$D > 0$ ($b^2 - 4c > 0$) から，$3\times(4\times2+3+2\times3) = 3\times17$ 通りの場合がある。

(ii)　a が奇数($a = 1$，3，5)のとき　$f(x) = -x^2 + bx + c$

$D > 0$ ($b^2 + 4c > 0$) から，任意の b, c で成り立ち，3×6^2 通りの場合がある。

(i)(ii)より，求める確率は，$\dfrac{3\times17+3\times6^2}{6^3} = \dfrac{53}{72}$ である。

(3)　$f'(x) = 2(-1)^a x + b$ となり，$f'(1) = 7$ より $2(-1)^a + b = 7$ ………(＊)

ここで，$f(x) = 0$ が異なる2つの実数解をもち，かつ $f'(1) = 7$ を満たすのは，

(i)　a が偶数($a = 2$，4，6)のとき　$f(x) = x^2 + bx + c$

(＊)より $2 + b = 7$ となるので $b = 5$ である。また $D > 0$ ($5^2 > 4c$) より，$1 \leqq c \leqq 6$ となり，$3\times1\times6 = 18$ 通りの場合がある。

(ii)　a が奇数($a = 1$，3，5)のとき　$f(x) = -x^2 + bx + c$

(＊)より $-2 + b = 7$ となるので満たす b は存在しない。

(i)(ii)より，この場合の確率は，$\dfrac{18+0}{6^3} = \dfrac{1}{12}$ である。

以上より，求める条件付き確率は，$\dfrac{1}{12} \div \dfrac{53}{72} = \dfrac{6}{53}$ である。

(4)　$f(x) = 0$ が異なる2つの実数解をもち，かつ少なくとも1つが正の解であるのは，

(i)　a が偶数($a = 2$，4，6)のとき　$f(x) = x^2 + bx + c = \left(x + \dfrac{b}{2}\right)^2 - \dfrac{b^2}{4} + c$

$x = -\dfrac{b}{2} < 0$ かつ $f(0) = c > 0$ なので，$y = f(x)$ のグラフは x 軸の正の部分と共有点をもたない。

(ii)　a が奇数($a = 1$，3，5)のとき　$f(x) = -x^2 + bx + c = -\left(x - \dfrac{b}{2}\right)^2 + \dfrac{b^2}{4} + c$

$x = \dfrac{b}{2} > 0$ かつ $f(0) = c > 0$ なので，$y = f(x)$ のグラフは x 軸の正の部分と共有点をつねに1つもち，$3\times6\times6 = 108$ 通りの場合がある。

(i)(ii)より，この場合の確率は，$\dfrac{0+108}{6^3} = \dfrac{1}{2}$ である。

以上より，求める条件付き確率は，$\dfrac{1}{2} \div \dfrac{53}{72} = \dfrac{36}{53}$ である。

［解 説］

題材も頻出タイプの確率の基本問題です。(3)と(4)は条件付き確率を求めるものですが，複雑な処理はなく，あっさり解決できます。

4

問題のページへ

(1)　c を実数とし，2 次方程式 $x^2+x-(c-1)=0$ が実数解 α，β $(\alpha<\beta)$ をもつとき，$D=1+4(c-1)=4c-3>0$ のもとで，

$$\alpha=\frac{-1-\sqrt{4c-3}}{2},\ \beta=\frac{-1+\sqrt{4c-3}}{2}$$

a,b を実数とし，$a+b=c^2$ ……①，$a\alpha+b\beta+c=0$ ……②が成り立ち，②から，

$$a\cdot\frac{-1-\sqrt{4c-3}}{2}+b\cdot\frac{-1+\sqrt{4c-3}}{2}+c=0$$
$$-(a+b)+(b-a)\sqrt{4c-3}+2c=0$$

①を代入すると，$(b-a)\sqrt{4c-3}=c^2-2c$ となり，$b-a=\dfrac{c(c-2)}{\sqrt{4c-3}}$ ………③

(2)　自然数 c に対し，$\sqrt{4c-3}$ が自然数でないとき，$\sqrt{4c-3}$ は無理数である。

そして，a，b も自然数のとき，$c(c-2)\neq0$ とすると，③の左辺は有理数，右辺は無理数となり成立しない。これより，$c(c-2)=0$ となり，$c=2$ である。

このとき，③から $a=b$，①から $a+b=4$ なので，$a=b=2$ となり，

$$(a,\ b,\ c)=(2,\ 2,\ 2)$$

(3)　自然数 s を用い，$4c-3=s^2$ ……④のとき，③から，$b-a=\dfrac{c(c-2)}{s}$ ………⑤

①⑤から，$2a=c^2-\dfrac{c(c-2)}{s}$ となり，$2as=(s-1)c^2+2c$ ………⑥

④から $c=\dfrac{s^2+3}{4}$ となり，⑥に代入すると $2as=\dfrac{(s-1)(s^2+3)^2}{16}+\dfrac{s^2+3}{2}$

$$32as=(s-1)(s^4+6s^2+9)+8(s^2+3)$$

まとめると，$s^5-s^4+6s^3+2s^2+(9-32a)s=-15$ ………⑦

(4)　⑦より，$s\{s^4-s^3+6s^2+2s+(9-32a)\}=-15$

すると，$s^4-s^3+6s^2+2s+(9-32a)$ は整数なので，s は 15 の正の約数である。

(i)　$s=1$ のとき　④より $c=\dfrac{1^2+3}{4}=1$

すると，⑥より $2a=2$ から $a=1$，①より $b=1^2-1=0$ となり不適。

(ii)　$s=3$ のとき　④より $c=\dfrac{3^2+3}{4}=3$

すると，⑥より $6a=2\cdot3^2+6$ から $a=4$，①より $b=3^2-4=5$

(iii)　$s=5$ のとき　④より $c=\dfrac{5^2+3}{4}=7$

すると，⑥より $10a=4\cdot7^2+14$ から $a=21$，①より $b=7^2-21=28$

(iv)　$s=15$ のとき　④より $c=\dfrac{15^2+3}{4}=57$

すると，⑥より $30a=14\cdot57^2+114$ から $a=1520$，①より $b=57^2-1520=1729$

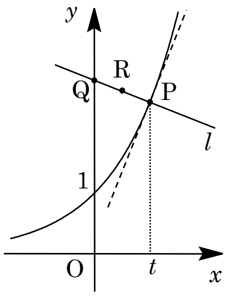
(i)～(iv)より，$(a,\ b,\ c)=(4,\ 5,\ 3)$，$(21,\ 28,\ 7)$，$(1520,\ 1729,\ 57)$

［解 説］

誘導の細かい整数問題です。ただ，文字がたくさん現れ，量的に計算も多いので，時間はかなり必要になります。

5

問題のページへ



(1) 曲線 $y=e^x$ に対し $y'=e^x$ となり，点 $\mathrm{P}(t,\ e^t)$ における接線の傾きは e^t なので，法線 l の傾きは $-e^{-t}$ から，l の方程式は，

$$y-e^t=-e^{-t}(x-t),\quad y=-e^{-t}x+te^{-t}+e^t\ \cdots\cdots\text{①}$$

(2) l と y 軸との交点 Q は，①から $\mathrm{Q}(0,\ te^{-t}+e^t)$ となり，線分 PQ の中点を $\mathrm{R}(x,\ y)$ とおくと，

$$x=\frac{t}{2}\ \cdots\cdots\text{②},\quad y=\frac{e^t+te^{-t}+e^t}{2}=\frac{te^{-t}+2e^t}{2}\ \cdots\cdots\text{③}$$

すると，②から $t=2x$ となり，③に代入すると，

$$y=\frac{2xe^{-2x}+2e^{2x}}{2}=xe^{-2x}+e^{2x}$$

なお，$t=0$ のとき，②③から $\mathrm{R}(0,\ 1)$ となり，題意を満たしている。

したがって，点 R の描く曲線 C の方程式は，$y=xe^{-2x}+e^{2x}\ \cdots\cdots\text{④}$

(3) $f(x)=xe^{-2x}+e^{2x}$ とおくと，④より $C:y=f(x)$ となり，

$$f'(x)=e^{-2x}-2xe^{-2x}+2e^{2x}=e^{-2x}(1-2x+2e^{4x})$$

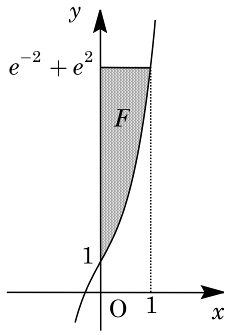
ここで，$g(x)=1-2x+2e^{4x}$ とおくと，

$$g'(x)=-2+8e^{4x}=2(4e^{4x}-1)$$

すると，$g'(x)=0$ の解は $x=\frac{1}{4}\log\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}\log 2$ から，$g(x)$ の増減は右表のようになり，

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}\log 2$	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

$$g\Big(-\frac{1}{2}\log 2\Big)=1+\log 2+2\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{2}+\log 2>0$$



これより，$g(x)>0$ すなわち $f'(x)>0$ から，$f(x)$ は単調に増加する。そして，$f(1)=e^{-2}+e^2$ に注意すると，曲線 C, y 軸，直線 $y=e^{-2}+e^2$ で囲まれた図形 F の面積 S は，

$$\begin{aligned}S&=(e^{-2}+e^2)\cdot 1-\int_0^1(xe^{-2x}+e^{2x})dx\\&=e^{-2}+e^2+\Big[\frac{1}{2}xe^{-2x}\Big]_0^1-\int_0^1\frac{1}{2}e^{-2x}dx-\Big[\frac{1}{2}e^{2x}\Big]_0^1\\&=e^{-2}+e^2+\frac{1}{2}e^{-2}+\Big[\frac{1}{4}e^{-2x}\Big]_0^1-\frac{1}{2}(e^2-1)\\&=\frac{1}{2}e^2+\frac{3}{2}e^{-2}+\frac{1}{4}(e^{-2}-1)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}e^2+\frac{7}{4}e^{-2}+\frac{1}{4}\end{aligned}$$

(4) 図形 F を x 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積 V は，

$$\begin{aligned}V&=\pi(e^{-2}+e^2)^2\cdot 1-\pi\int_0^1(xe^{-2x}+e^{2x})^2dx\\&=\pi(e^{-4}+2+e^4)-\pi\Big\{\int_0^1x^2e^{-4x}dx+\int_0^1 2x\,dx+\int_0^1 e^{4x}dx\Big\}\end{aligned}$$

ここで，$\displaystyle\int_0^1 2x\,dx+\int_0^1 e^{4x}dx=\Big[\,x^2\,\Big]_0^1+\Big[\,\frac{1}{4}e^{4x}\,\Big]_0^1=\frac{1}{4}e^4+\frac{3}{4}$ ………⑤

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2e^{-4x}dx&=-\Big[\,\frac{1}{4}x^2e^{-4x}\,\Big]_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1 xe^{-4x}dx\\&=-\frac{1}{4}e^{-4}-\Big[\,\frac{1}{8}xe^{-4x}\,\Big]_0^1+\frac{1}{8}\int_0^1 e^{-4x}dx\\&=-\frac{1}{4}e^{-4}-\frac{1}{8}e^{-4}-\Big[\,\frac{1}{32}e^{-4x}\,\Big]_0^1=-\frac{3}{8}e^{-4}-\frac{1}{32}(e^{-4}-1)\\&=-\frac{13}{32}e^{-4}+\frac{1}{32}\text{ ………⑥}\end{aligned}$$

⑤⑥を代入すると，

$$V=\pi(e^{-4}+2+e^4)-\pi\Big(-\frac{13}{32}e^{-4}+\frac{1}{32}+\frac{1}{4}e^4+\frac{3}{4}\Big)=\pi\Big(\frac{3}{4}e^4+\frac{45}{32}e^{-4}+\frac{39}{32}\Big)$$

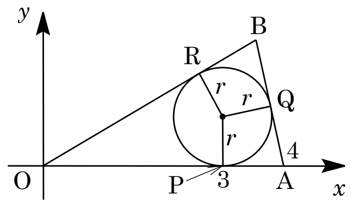
［解 説］

軌跡および面積と体積の問題です。基本的な考え方で処理ができますが，ただ計算は半端ではありません。

6

問題のページへ

(1)　点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(4,\ 0)$ および第 1 象限の点 B を頂点とする△OAB の内接円 C と，辺 OA, AB, OB の接点をそれぞれ $\mathrm{P}(3,\ 0)$, Q, R とおくと，

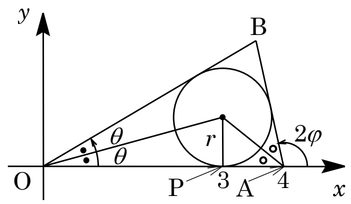


$$\mathrm{OB}=\mathrm{OR}+\mathrm{BR}=\mathrm{OP}+\mathrm{BQ}=3+\mathrm{BQ}$$

$$\mathrm{AB}=\mathrm{AQ}+\mathrm{BQ}=\mathrm{AP}+\mathrm{BQ}=1+\mathrm{BQ}$$

これより，$\mathrm{OB}-\mathrm{AB}=(3+\mathrm{BQ})+(1+\mathrm{BQ})=2$ ………(＊)

(2)　線分 OB, AB と x 軸の正の部分とのなす角をそれぞれ 2θ，2φ とおくと，内接円 C の半径 r は,



$$r=\mathrm{OP}\tan\theta=3\tan\theta$$

$$r=\mathrm{AP}\tan\frac{\pi-2\varphi}{2}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\frac{1}{\tan\varphi}$$

すると，$\tan\theta=\dfrac{r}{3}$，$\tan\varphi=\dfrac{1}{r}$ となる。

さて，点 B が第 1 象限にある条件は，$0<2\theta<2\varphi<\pi$ から $0<\theta<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ となり，

$$0<\tan\theta<\tan\varphi,\quad 0<\frac{r}{3}<\frac{1}{r}$$

よって，$0<r<\sqrt{3}$ となる。

(3)　(＊)より，点 B は 2 定点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(4,\ 0)$ からの距離の差が一定なので，点 B の軌跡は 2 点 O, A を焦点とする双曲線の右側の枝の第 1 象限の部分となる。

ここで，線分 OA の中点が $(2,\ 0)$ より，その方程式を $\dfrac{(x-2)^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ とおく。

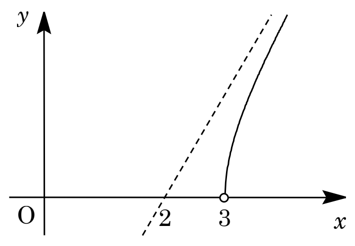
まず，(＊)より $2a=2$ から $a=1$ となり，焦点間距離 $2c=4$ から $c=2$ である。

そして，$a^2+b^2=c^2$ から，$b^2=2^2-1^2=3$ なので，双曲線の方程式は,

$$(x-2)^2-\frac{y^2}{3}=1$$

漸近線は，$y=\pm\sqrt{3}(x-2)$ となり，点 B の軌跡は右図の曲線である。

ただし，端点の白丸は除く。



［解　説］

双曲線の定義に関する問題です。(2)はいろいろな方法が考えられ，方針に迷うところです。ここでは，r が $r>0$ で増加したとき，線分 OB と AB の傾きの変化に着目し，角を設定して記述しました。