1

解答解説のページへ

箱の中に 1 から N までの番号が 1 つずつ書かれた N 枚のカードが入っている。ただし，N は 4 以上の自然数である。「この箱からカードを 1 枚取り出し，書かれた番号を見てもとに戻す」という試行を考える。この試行を 4 回繰り返し，カードに書かれた番号を順に X, Y, Z, W とする。次の問いに答えよ。

(1)　$X=Y=Z=W$ となる確率を求めよ。

(2)　X, Y, Z, W が 4 つの異なる番号からなる確率を求めよ。

(3)　X, Y, Z, W のうち 3 つが同じ番号で残り 1 つが他と異なる番号である確率を求めよ。

(4)　X, Y, Z, W が 3 つの異なる番号からなる確率を求めよ。

2

解答解説のページへ

原点を O とする座標平面上の 2 点 A$(3,\ 0)$，B$(1,\ 1)$ を考える。α，β を実数とし，点 P$(\alpha,\ \beta)$ は直線 OA 上にも直線 OB 上にもないものとする。直線 OA に関して点 P と対称な点を Q とし，直線 OB に関して点 P と対称な点を R とする。次の問いに答えよ。

(1) 点 Q および点 R の座標を，α，β を用いて表せ。

(2) 直線 OA と直線 QR が交点 S をもつための条件を，α，β のうちの必要なものを用いて表せ。さらに，このときの交点 S の座標を，α，β のうちの必要なものを用いて表せ。

(3) 直線 OB と直線 QR が交点 T をもつための条件を，α，β のうちの必要なものを用いて表せ。さらに，このときの交点 T の座標を，α，β のうちの必要なものを用いて表せ。

(4) α，β は(2)と(3)の両方の条件を満たすとし，S, T は(2), (3)で定めた点であるとする。このとき，直線 OA と直線 BS が垂直となり，直線 OB と直線 AT が垂直となる α，β の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

空間内の 6 点 A, B, C, D, E, F は 1 辺の長さが 1 の正八面体の頂点であり，四角形 ABCD は正方形であるとする。$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$，$\vec{e}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{b}\cdot\vec{d}$，$\vec{b}\cdot\vec{e}$，$\vec{d}\cdot\vec{e}$ の値を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=p\vec{b}+q\vec{d}+r\vec{e}$ を満たす実数 p, q, r の値を求めよ。

(3) 辺 BE を $1:2$ に内分する点を G とする。また，$0<t<1$ を満たす実数 t に対し，辺 CF を $t:(1-t)$ に内分する点を H とする。t が $0<t<1$ の範囲を動くとき，$\triangle\mathrm{AGH}$ の面積が最小となる t の値とそのときの $\triangle\mathrm{AGH}$ の面積を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$を，$a_1=2$，$a_{n+1}=\left(\dfrac{n^6(n+1)}{a_n{}^3}\right)^2$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$により定める。また，$b_n=\log_2\dfrac{a_n}{n^2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$とおく。次の問いに答えよ。必要ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n\log_2 n}{6^{2n}}=0$であることを用いてよい。

(1) b_1，b_2を求めよ。

(2) 数列$\{b_n\}$は等比数列であることを示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6^{2n}}\sum_{k=1}^{n}\log_2 k=0$であることを示せ。

(4) 極限値$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6^{2n}}\sum_{k=1}^{n}\log_2 a_{2k}$を求めよ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

関数 $f(x)=\log\dfrac{3x+3}{x^2+3}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。ただし，グラフの凹凸は調べなくてよい。

(2)　s を定数とするとき，次の x についての方程式(＊)の異なる実数解の個数を調べよ。　　(＊)　$f(x)=s$

(3)　定積分 $\displaystyle\int_0^3 \frac{2x^2}{x^2+3}dx$ の値を求めよ。

(4)　(2)の(＊)が実数解をもつ s に対して，(2)の(＊)の実数解のうち最大のものから最小のものを引いた差を $g(s)$ とする。ただし，(2)の(＊)の実数解が 1 つだけであるときには $g(s)=0$ とする。関数 $f(x)$ の最大値を α とおくとき，定積分 $\displaystyle\int_0^{\alpha} g(s)ds$ の値を求めよ。

1

問題のページへ

(1) $N \geqq 4$ のとき, 1 から N までの番号の書かれた N 枚のカードが入っている箱から, 1 枚取り出してはもとに戻すという試行を 4 回行うと, N^4 通りの場合が同様に確からしい。そして, 取り出したカードの番号を, 順に X, Y, Z, W とする。

$X=Y=Z=W$ となるのは N 通りの場合があり, この確率は $\dfrac{N}{N^4}=\dfrac{1}{N^3}$ となる。

(2) X, Y, Z, W が 4 つの異なる番号からなるのは ${}_N\mathrm{P}_4$ 通りの場合があり, この確率は,

$$\frac{{}_N\mathrm{P}_4}{N^4}=\frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{N^4}=\frac{(N-1)(N-2)(N-3)}{N^3}$$

(3) X, Y, Z, W のうち 3 つが同じ番号で残り 1 つが他と異なる番号であるのは, 1 から N までから 2 つの異なる番号を選び, X, Y, Z, W を 3 つと 1 つに分けて, たとえば 1 と 2 を選び $X=Y=Z$ と W に分け両者を対応させると考えると, ${}_N\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_3\times 2!$ 通りの場合があるので, この確率は,

$$\frac{{}_N\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_3\times 2!}{N^4}=\frac{4N(N-1)}{N^4}=\frac{4(N-1)}{N^3}$$

(4) X, Y, Z, W が 3 つの異なる番号からなるのは, 1 から N までから 3 つの異なる番号を選び, X, Y, Z, W を 2 つと 1 つと 1 つに分けて, たとえば 1 と 2 と 3 を選び $X=Y$ と Z と W に分け両者を対応させると考えると, ${}_N\mathrm{C}_3\times{}_4\mathrm{C}_2\times 3!$ 通りの場合があるので, この確率は,

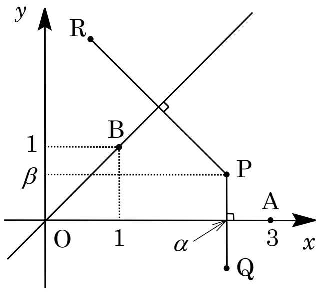
$$\frac{{}_N\mathrm{C}_3\times{}_4\mathrm{C}_2\times 3!}{N^4}=\frac{6N(N-1)(N-2)}{N^4}=\frac{6(N-1)(N-2)}{N^3}$$

［解 説］

確率の標準的な問題です。(3)と(4)は, 解答例に触れているように, 具体例を考えて場合の数を計算しています。

2

問題のページへ



(1) 2 点 $A(3,\ 0)$，$B(1,\ 1)$ に対し，直線 OA の方程式は $y=0$ ……①，直線 OB は $y=x$ ……②である。

すると，点 $P(\alpha,\ \beta)$ と直線 OA に関して対称な点 Q は $Q(\alpha,\ -\beta)$，直線 OB に関して対称な点 R は $R(\beta,\ \alpha)$ と表される。

(2) 点 P は直線 OA 上にも直線 OB 上にもないことより，$\beta\neq 0$ かつ $\alpha\neq\beta$ である。

さて，$\overrightarrow{QR}=(\beta-\alpha,\ \alpha+\beta)$ より，直線 QR は，法線ベクトルの成分として $(\alpha+\beta,\ \alpha-\beta)$ をとると，その方程式は $(\alpha+\beta)(x-\alpha)+(\alpha-\beta)(y+\beta)=0$ となり，

$$(\alpha+\beta)x+(\alpha-\beta)y=\alpha^2+\beta^2 \cdots\cdots\cdots ③$$

①③を連立すると，$(\alpha+\beta)x=\alpha^2+\beta^2$ ………④

これより，直線 OA と直線 QR が交点 S をもつ条件は，

・$\alpha+\beta\neq 0$ のとき　④より $x=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}$，$y=0$ となる。

・$\alpha+\beta=0$ のとき　④より $\alpha^2+\beta^2=0$ となり，$\alpha=\beta=0$ から不適である。

したがって，$\alpha+\beta\neq 0$ のもとで，$S\left(\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta},\ 0\right)$ である。

(3) ②③を連立して $(\alpha+\beta)x+(\alpha-\beta)x=\alpha^2+\beta^2$ から，$2\alpha x=\alpha^2+\beta^2$ ………⑤

これより，直線 OB と直線 QR が交点 T をもつ条件は，

・$\alpha\neq 0$ のとき　⑤より $x=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha}$，$y=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha}$ となる。

・$\alpha=0$ のとき　⑤より $\alpha^2+\beta^2=0$ となり，$\alpha=\beta=0$ から不適である。

したがって，$\alpha\neq 0$ のもとで，$T\left(\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha},\ \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha}\right)$ である。

(4) (2)より，$\overrightarrow{BS}=\left(\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}-1,\ -1\right)$，$\overrightarrow{OA}=3(1,\ 0)$ であり，直線 OA と直線 BS が垂直なので，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BS}=0$ から $\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}-1=0$ となり，

$$\alpha^2+\beta^2=\alpha+\beta \cdots\cdots\cdots ⑥$$

(3)より，$\overrightarrow{AT}=\left(\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha}-3,\ \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha}\right)$，$\overrightarrow{OB}=(1,\ 1)$ であり，直線 OB と直線 AT が垂直なので，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AT}=0$ から $\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha}-3+\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha}=0$ となり，

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha}=3,\ \ \alpha^2+\beta^2=3\alpha \cdots\cdots\cdots ⑦$$

⑥⑦より，$\alpha+\beta=3\alpha$ から $\beta=2\alpha$ となり，$\alpha^2+4\alpha^2=3\alpha$ で $\alpha\neq 0$ から，

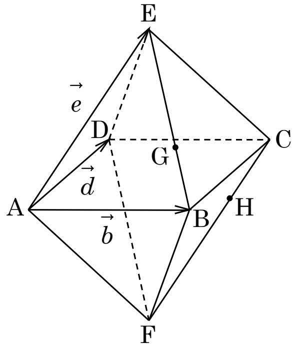
$$\alpha=\frac{3}{5},\ \ \beta=\frac{6}{5}$$

［解 説］

点と直線についての基本題です。量的には多めですが，小刻みな誘導に乗れば，必要なのは正確な計算力だけです。なお，(1)は結論だけ記しましたが，プロセスも必要だったのでしょうか。

3

問題のページへ



(1) 1 辺の長さが 1 の正八面体 ABCDEF に対して，
$\vec{b}=\overrightarrow{AB}$，$\vec{d}=\overrightarrow{AD}$，$\vec{e}=\overrightarrow{AE}$ とおくと，

$$\vec{b}\cdot\vec{d}=1\cdot 1\cdot\cos 90^\circ=0$$

$$\vec{b}\cdot\vec{e}=\vec{d}\cdot\vec{e}=1\cdot 1\cdot\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$

(2) 条件より $\overrightarrow{AF}=p\vec{b}+q\vec{d}+r\vec{e}$……①であり，右図から，

$$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{EA}=\vec{b}+\vec{d}-\vec{e}\text{……②}$$

$\vec{b}$，$\vec{d}$，$\vec{e}$ は 1 次独立なので，①②から，

$$p=q=1,\ r=-1$$

(3) 辺 BE を $1:2$ に内分する点を G とすると，$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(2\vec{b}+\vec{e})$

辺 CF を $t:(1-t)$ に内分する点を H とすると，$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CH}=\vec{b}+\vec{d}-t\vec{e}$

$$|\overrightarrow{AG}|^2=\frac{1}{3^2}|2\vec{b}+\vec{e}|^2=\frac{1}{9}\left(4\cdot 1^2+4\cdot\frac{1}{2}+1^2\right)=\frac{7}{9}$$

$$|\overrightarrow{AH}|^2=|\vec{b}+\vec{d}-t\vec{e}|^2=1^2+1^2+t^2\cdot 1^2+2\cdot 0-2t\cdot\frac{1}{2}-2t\cdot\frac{1}{2}=t^2-2t+2$$

$$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AH}=\frac{1}{3}(2\vec{b}+\vec{e})\cdot(\vec{b}+\vec{d}-t\vec{e})=\frac{1}{3}\left(2\cdot 1^2+2\cdot 0-2t\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-t\cdot 1^2\right)$$

$$=\frac{1}{3}(-2t+3)$$

ここで，△AGH の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AG}|^2|\overrightarrow{AH}|^2-(\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AH})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{9}(t^2-2t+2)-\frac{1}{9}(-2t+3)^2}$$

$$=\frac{1}{6}\sqrt{3t^2-2t+5}=\frac{1}{6}\sqrt{3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{14}{3}}$$

$0<t<1$ より，$t=\frac{1}{3}$ のとき S は最小値 $\frac{1}{6}\sqrt{\frac{14}{3}}=\frac{\sqrt{42}}{18}$ をとる。

［解　説］

空間ベクトルの基本題です。複雑な計算もありません。

4

問題のページへ

(1) $a_1=2$，$a_{n+1}=\left(\dfrac{n^6(n+1)}{{a_n}^3}\right)^2$ に対し，$b_n=\log_2\dfrac{a_n}{n^2}$ とおくと，$b_1=\log_2\dfrac{a_1}{1^2}=1$

また，$a_2=\left(\dfrac{1^6\cdot 2}{{a_1}^3}\right)^2=\left(\dfrac{2}{8}\right)^2=\dfrac{1}{2^4}$ から，$b_2=\log_2\dfrac{a_2}{2^2}=\log_2\dfrac{1}{2^6}=-6$

(2) $b_{n+1}=\log_2\dfrac{a_{n+1}}{(n+1)^2}=\log_2\left\{\left(\dfrac{n^6(n+1)}{{a_n}^3}\right)^2\cdot\dfrac{1}{(n+1)^2}\right\}=\log_2\left(\dfrac{n^6}{{a_n}^3}\right)^2$

$=\log_2\left(\dfrac{n^2}{a_n}\right)^6=\log_2\left(\dfrac{a_n}{n^2}\right)^{-6}=-6\log_2\dfrac{a_n}{n^2}=-6b_n$

これより，数列$\{b_n\}$は公比-6の等比数列である。

(3) $1\leqq k\leqq n$ のとき，$0=\log_2 1\leqq\log_2 k\leqq\log_2 n$ となり，

$$0\leqq\sum_{k=1}^{n}\log_2 k\leqq\sum_{k=1}^{n}\log_2 n=n\log_2 n\,,\quad 0\leqq\frac{1}{6^{2n}}\sum_{k=1}^{n}\log_2 k\leqq\frac{n\log_2 n}{6^{2n}}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n\log_2 n}{6^{2n}}=0$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6^{2n}}\sum_{k=1}^{n}\log_2 k=0$ ………(＊)

(4) (1)(2)より，$b_n=b_1(-6)^{n-1}=(-6)^{n-1}$ となり，$\log_2\dfrac{a_n}{n^2}=(-6)^{n-1}$ から，

$$\log_2 a_n-\log_2 n^2=(-6)^{n-1}\,,\quad \log_2 a_n=2\log_2 n+(-6)^{n-1}$$

これより，$\log_2 a_{2n}=2\log_2(2n)+(-6)^{2n-1}=2+2\log_2 n-6^{2n-1}$ となり，

$$\sum_{k=1}^{n}\log_2 a_{2k}=\sum_{k=1}^{n}(2+2\log_2 k-6^{2k-1})=2n+2\sum_{k=1}^{n}\log_2 k-\frac{6(36^n-1)}{36-1}$$

$$=2n+2\sum_{k=1}^{n}\log_2 k-\frac{6}{35}(6^{2n}-1)$$

$$\frac{1}{6^{2n}}\sum_{k=1}^{n}\log_2 k=\frac{2n}{6^{2n}}+\frac{2}{6^{2n}}\sum_{k=1}^{n}\log_2 k-\frac{6}{35}\cdot\frac{6^{2n}-1}{6^{2n}}$$

(＊)と，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{6^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\log_2 n}{6^{2n}}\cdot\frac{2}{\log_2 n}=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{6^{2n}-1}{6^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{6^{2n}}\right)=1$ より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6^{2n}}\sum_{k=1}^{n}\log_2 a_{2k}=-\frac{6}{35}$$

［解　説］

漸化式と極限についての問題です。ただ，飛躍した誘導がないので，見かけほどではありません。

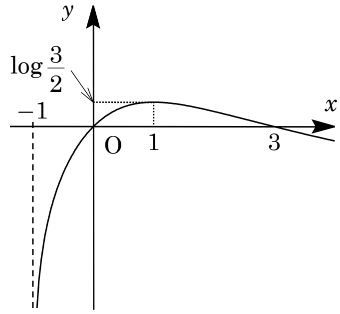
$\boxed{5}$

問題のページへ

(1)　$f(x)=\log\dfrac{3x+3}{x^2+3}$ に対して，$\dfrac{3x+3}{x^2+3}>0$ から $x>-1$ において，

$$f'(x)=\frac{x^2+3}{3x+3}\cdot\frac{3(x^2+3)-(3x+3)\cdot 2x}{(x^2+3)^2}$$
$$=-\frac{x^2+2x-3}{(x+1)(x^2+3)}$$
$$=-\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)(x^2+3)}$$

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\log\frac{3}{2}$	$\searrow$



これより，右上表が $f(x)$ の増減である。

そして，$\displaystyle\lim_{x\to-1+0}f(x)=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$ であり，$y=f(x)$ と x 軸の交点は $f(x)=0$ から，

$$\log\frac{3x+3}{x^2+3}=0,\quad \frac{3x+3}{x^2+3}=1$$

$3x+3=x^2+3$ から，$x=0,\ 3$ となる。

よって，$y=f(x)$ のグラフの概形は右上図のようになる。

(2)　$f(x)=s$ の異なる実数解の個数は，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=s$ の共有点の個数に対応するので，(1)の図より，

$$s>\log\frac{3}{2}\ \text{のとき 0 個},\quad s=\log\frac{3}{2}\ \text{のとき 1 個},\quad s<\log\frac{3}{2}\ \text{のとき 2 個}$$

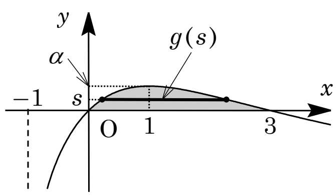
(3)　$I=\displaystyle\int_0^3\frac{2x^2}{x^2+3}dx=\int_0^3\Big(2-\frac{6}{x^2+3}\Big)dx=6-6\int_0^3\frac{1}{x^2+3}dx$ とおく。

ここで，$x=\sqrt{3}\tan\theta\ \Big(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\Big)$ とおくと，$dx=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$ となり，

$$\int_0^3\frac{1}{x^2+3}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{3\tan^2\theta+3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$$

よって，$I=6-6\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{9}\pi=6-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\pi$ である。

(4)　$\alpha=\log\dfrac{3}{2}$ として $J=\displaystyle\int_0^\alpha g(s)ds$ とおくと，右図において，$g(s)$ は太線の線分の長さを表すことから，J の値は網点部の面積に等しい。



$$J=\int_0^3 f(x)dx=\int_0^3\log\frac{3x+3}{x^2+3}dx$$
$$=\Big[(x+1)\log\frac{3x+3}{x^2+3}\Big]_0^3+\int_0^3(x+1)\cdot\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)(x^2+3)}dx$$
$$=\int_0^3\frac{x^2+2x-3}{x^2+3}dx=\int_0^3\Big(\frac{x^2}{x^2+3}+\frac{2x}{x^2+3}-\frac{3}{x^2+3}\Big)dx$$

(3)より，$J=\dfrac{1}{2}I+\left[\,\log(x^2+3)\,\right]_0^3-3\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{9}\pi$ となり，

$$J=\frac{1}{2}\left(6-\frac{2}{3}\sqrt{3}\pi\right)+\log\frac{12}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi=3+2\log 2-\frac{2}{3}\sqrt{3}\pi$$

［解　説］

微積分の総合問題です。(1)の $f'(x)$ の式と(3)の定積分を誘導としてみると，(4)の部分積分では，$1=(x+1)'$ という考え方が導けます。