1

解答解説のページへ

A, B, C, D, E の 5 人が，それぞれゲーム α とゲーム β の 2 種類のゲームを行った。ゲーム α の得点を x，ゲーム β の得点を y で表す。右の表はそれぞれのゲームにおける得点である。ただし，a, b は整数である。なお，得点が負になることもあり得る。

	A	B	C	D	E
得点 x	7	6	8	a	4
得点 y	0	-4	-1	2	b

ゲーム α の得点 x の平均値は 7 であるとし，ゲーム β の得点 y の平均値を m とする。次の問いに答えよ。

(1)　a の値を求めよ。

(2)　p, q は実数で，$p \neq 0$ とする。ゲーム β の得点 y を $z = py + q$ により変換し，新たな変量 z を作成する。z の分散を ${s_z}^2$，2 つの変量 x，z の共分散を s_{xz} とする。このとき，${s_z}^2$ と s_{xz} を p，q，m のうちの必要なものを用いて表せ。ただし，変量 x と z の共分散は x の偏差と z の偏差の積の平均値である。

(3)　変量 x と(2)で作った変量 z の相関係数が $\dfrac{3}{4}$ であるとき，m と b の値を求めよ。また，p が正であるか負であるかを答えよ。

2

解答解説のページへ

実数 t および $0<a<b$ を満たす実数 a, b に対し，$f(t)=\int_a^b (x-at)(x-bt)\,dx$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) $f(0)$ を a と b を用いて表せ。

(2) $14f(1)+f(0)=0$ が成り立つとする。このとき，$\dfrac{b}{a}$ の値を求めよ。

(3) $14f(1)+f(0)=0$ が成り立つとする。t の関数 $y=f(t)-f(0)$ の最小値が -6 となるとき，a の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

座標空間内の 4 点 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(1,\ 1,\ 0)$，B$(0,\ 1,\ 1)$，C$(1,\ 2,\ -1)$ に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{a}\cdot\vec{c}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$ の値を求めよ。

(2)　点 O, A, B を通る平面を α とする。点 C から平面 α に下ろした垂線と平面 α の交点を M とする。点 M の座標を求めよ。

(3)　点 M を(2)で定めた点とする。点 D を直線 CM 上の点であって，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|$ となるものとする。ただし，点 D は点 C とは異なる点である。このとき，点 D の座標を求めよ。

(4)　点 D を(3)で定めた点とする。三角形 CAD の面積 S を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

a と r を正の実数とする。座標平面上の放物線 $y=x^2$ と，中心 $(0,\ a)$，半径 r の円 C を考える。次の問いに答えよ。

(1)　$a=r$ とする。このとき，放物線 $y=x^2$ と円 C との共有点が 1 つのみになるような r の値の範囲を求めよ。

(2)　円 C が不等式 $y>0$ を表す領域に含まれるための必要十分条件を a と r を用いて表せ。

(3)　a と r は(2)で求めた条件を満たすとする。このとき，放物線 $y=x^2$ と円 C との共有点がちょうど 2 つになるような $(r,\ a)$ の範囲を ra 平面に図示せよ。

(4)　正の実数 s に対し，中心 $(0,\ a+r+s)$，半径 s の円を C' とする。円 C と円 C' は次の条件(i)と(ii)を満たすとする。

　(i)　円 C は不等式 $y>0$ の表す領域に含まれ，さらに放物線 $y=x^2$ と円 C との共有点はちょうど 2 つである。

　(ii)　放物線 $y=x^2$ と円 C' との共有点はちょうど 2 つである。

　このとき，s を r を用いて表せ。

1

問題のページへ

(1)　x の平均値は 7 なので，$\dfrac{7+6+8+a+4}{5}=7$ から $a=10$ である。

(2)　y の平均値は m なので，$\dfrac{0-4-1+2+b}{5}=m$ から $b=5m+3$ となり，

$$s_y{}^2=\overline{y^2}-(\overline{y})^2=\frac{0+16+1+4+(5m+3)^2}{5}-m^2=\frac{25m^2+30m+30}{5}-m^2$$
$$=4m^2+6m+6$$
$$s_{xy}=\overline{xy}-\overline{x}\cdot\overline{y}=\frac{0-24-8+20+4(5m+3)}{5}-7m=\frac{20m}{5}-7m=-3m$$

ここで，$z=py+q$ から，$s_z{}^2=p^2s_y{}^2$，$s_{xz}=ps_{xy}$ となり，

$$s_z{}^2=p^2(4m^2+6m+6)=2p^2(2m^2+3m+3)\text{，}\ s_{xz}=-3pm$$

(3)　まず，$s_x{}^2=\overline{x^2}-(\overline{x})^2=\dfrac{49+36+64+100+16}{5}-49=4$ である。

ここで，x と z の相関係数が $\dfrac{3}{4}$ から $\dfrac{s_{xz}}{\sqrt{s_x{}^2}\sqrt{s_z{}^2}}=\dfrac{3}{4}$ となり，$4s_{xz}=3s_xs_z$ より，

$$-12pm=3\cdot 2\sqrt{2p^2(2m^2+3m+3)}\text{，}\ -2pm=|\,p\,|\sqrt{2(2m^2+3m+3)}$$

すると，$-2pm\geqq 0$ ($pm\leqq 0$) として，両辺 2 乗すると，

$$4p^2m^2=2p^2(2m^2+3m+3)\text{，}\ 2m^2=2m^2+3m+3$$

よって，$3m+3=0$ から $m=-1$ となり，$b=5\cdot(-1)+3=-2$ である。

また，$p\neq 0$ かつ $-p\leqq 0$ から，p は正である。

［解 説］

データの分析の内容で，文系では 8 年ぶり，理系は初めての出題です。なお，(2)では，共分散についての公式 $s_{xy}=\overline{xy}-\overline{x}\cdot\overline{y}$，$s_{xz}=ps_{xy}$ を，説明なしに利用しています。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　$0<a<b$ のとき，$f(t)=\displaystyle\int_a^b(x-at)(x-bt)dx$ に対して，

$$f(0)=\int_a^b x^2dx=\Big[\frac{x^3}{3}\Big]_a^b=\frac{1}{3}(b^3-a^3)$$

(2)　$f(1)=\displaystyle\int_a^b(x-a)(x-b)dx=-\frac{1}{6}(b-a)^3$ となり，$14f(1)+f(0)=0$ から，

$$-\frac{7}{3}(b-a)^3+\frac{1}{3}(b^3-a^3)=0\,,\ \ -(b-a)\{7(b-a)^2-(b^2+ab+a^2)\}=0$$

$0<a<b$ から $7(b-a)^2-(b^2+ab+a^2)=0$ となり，$6a^2-15ab+6b^2=0$ より，

$$2a^2-5ab+2b^2=0\,,\ \ (a-2b)(2a-b)=0$$

すると，$0<a<b$ から $b=2a$ となり，$\dfrac{b}{a}=2$ である。

(3)　(1)(2)から $b=2a$ のとき，$f(0)=\dfrac{1}{3}(8a^3-a^3)=\dfrac{7}{3}a^3$ となり，

$$f(t)=\int_a^{2a}(x-at)(x-2at)dx=\int_a^{2a}(x^2-3atx+2a^2t^2)dx$$

$$=\Big[\frac{x^3}{3}-\frac{3at}{2}x^2+2a^2t^2x\Big]_a^{2a}=\frac{7a^3}{3}-\frac{3at}{2}\cdot 3a^2+2a^2t^2\cdot a$$

$$=2a^3t^2-\frac{9a^3}{2}t+\frac{7a^3}{3}=2a^3\Big(t-\frac{9}{8}\Big)^2-\frac{81}{32}a^3+f(0)$$

これより，$y=f(t)-f(0)=2a^3\Big(t-\dfrac{9}{8}\Big)^2-\dfrac{81}{32}a^3$ となり，最小値が -6 から，

$$-\frac{81}{32}a^3=-6\,,\ \ a^3=\frac{64}{27}\,,\ \ a=\frac{4}{3}\ (a>0 \text{ を満たしている})$$

［解　説］

定積分の計算についての基本的な問題です。計算も平易です。

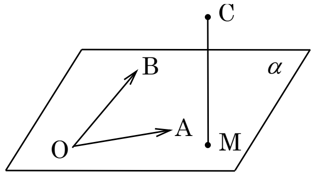
3

問題のページへ

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}=(1,\ 1,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}=(0,\ 1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}=(1,\ 2,\ -1)$ に対して，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0+1+0=1,\ \vec{a}\cdot\vec{c}=1+2+0=3,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=0+2-1=1$$

(2)　まず，$|\vec{a}|^2=1+1+0=2$，$|\vec{b}|^2=1+1+0=2$



ここで，点 C から平面 α に下ろした垂線の足 M に対して，s,t を実数として $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{CM}}=s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c}$$

$\overrightarrow{\mathrm{CM}}\perp\vec{a}$ から $\overrightarrow{\mathrm{CM}}\cdot\vec{a}=0$ となり，$s\cdot2+t\cdot1-3=0$ から，$2s+t=3$………①

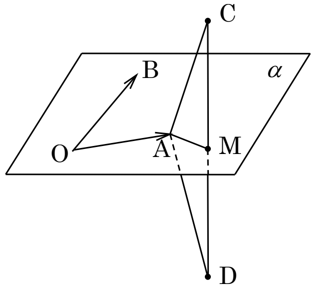
$\overrightarrow{\mathrm{CM}}\perp\vec{b}$ から $\overrightarrow{\mathrm{CM}}\cdot\vec{b}=0$ となり，$s\cdot1+t\cdot2-1=0$ から，$s+2t=1$………②

①②より，$s=\dfrac{5}{3}$，$t=-\dfrac{1}{3}$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{5}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}=\frac{5}{3}(1,\ 1,\ 0)-\frac{1}{3}(0,\ 1,\ 1)=\left(\frac{5}{3},\ \frac{4}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$$

よって，点 M の座標は $\mathrm{M}\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{4}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right)$ である。

(3)　平面 α に垂直な直線 CM 上の点 D が $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|$ $(\mathrm{C}\neq\mathrm{D})$ を満たすとき，点 D は平面 α について点 C と面対称な点である。すなわち，点 D は線分 CM を $2:1$ に外分することより，その座標は，



$$\frac{1}{2-1}\left(\frac{10}{3}-1,\ \frac{8}{3}-2,\ -\frac{2}{3}+1\right)=\left(\frac{7}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$$

(4)　$\mathrm{AM}\perp\mathrm{CD}$ から，$\triangle\mathrm{CAD}$ の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{CD}\cdot\mathrm{AM}=\frac{1}{2}\cdot2\mathrm{CM}\cdot\mathrm{AM}=\mathrm{CM}\cdot\mathrm{AM}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{5}{3}-1\right)^2+\left(\frac{4}{3}-2\right)^2+\left(-\frac{1}{3}+1\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{5}{3}-1\right)^2+\left(\frac{4}{3}-1\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{2}{3}\sqrt{2}$$

［解　説］

空間ベクトルについての基本題で，頻出タイプの構図です。

4　問題のページへ

(1)　放物線 $y=x^2$ ……①と円 $C: x^2+(y-a)^2=r^2$ $(a>0,\ r>0)$ ……②に対し，

$a=r$ のとき，②は $x^2+(y-r)^2=r^2$ ……②′ となり，①②′ を連立すると，

$$y+(y-r)^2=r^2,\quad y^2-(2r-1)y=0,\quad y\{y-(2r-1)\}=0\ \cdots\cdots③$$

③より，$y=0,\ 2r-1$ となり，①②′ の共有点について，

(i)　$2r-1=0$ $\left(r=\dfrac{1}{2}\right)$ のとき　①③の解は，$(x,\ y)=(0,\ 0)$

(ii)　$2r-1<0$ $\left(0<r<\dfrac{1}{2}\right)$ のとき　①③の解は，$(x,\ y)=(0,\ 0)$

(iii)　$2r-1>0$ $\left(r>\dfrac{1}{2}\right)$ のとき　①③の解は，$(x,\ y)=(0,\ 0)$，$(\pm\sqrt{2r-1},\ 2r-1)$

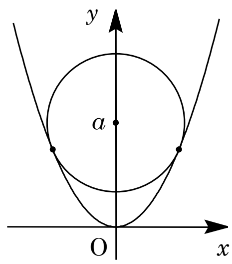
(i)〜(iii)より，①②′ の共有点が 1 つのみになる条件は，$0<r\leqq\dfrac{1}{2}$ である。

(2)　円 C について，②から $a-r\leqq y\leqq a+r$ である。

すると，円 C が領域 $y>0$ に含まれる条件は，$a-r>0$ すなわち $0<r<a$ である。

(3)　$0<r<a$ のとき，①②を連立すると $y+(y-a)^2=r^2$ から，

$$y^2-(2a-1)y+a^2-r^2=0\ \cdots\cdots④$$

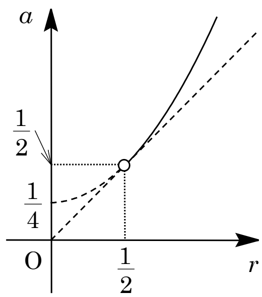


①②が共有点を 2 つもつ条件は，④が正の解を 1 つだけもつことに対応するので，$f(y)=y^2-(2a-1)y+a^2-r^2$ とおき，

$$f(y)=\left(y-\frac{2a-1}{2}\right)^2+a-r^2-\frac{1}{4}$$

$f(0)=a^2-r^2>0$ に注意すると，求める条件は，

$$\frac{2a-1}{2}>0,\quad a-r^2-\frac{1}{4}=0$$



まとめると，$a>\dfrac{1}{2}$，$a=r^2+\dfrac{1}{4}$ となり，$0<r<a$ と合わせ，さらに $a=r^2+\dfrac{1}{4}$ と $a=r$ が $(r,\ a)=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ で接することに留意して $(r,\ a)$ の範囲を ra 平面に図示すると，右図の実線部となる。ただし，$(r,\ a)=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ は含まない。

(4)　円 C と円 $C': x^2+\{y-(a+r+s)\}^2=s^2$ $(s>0)$ ……⑤に対し，(3)と条件(i)から，

$$a=r^2+\frac{1}{4}\ \cdots\cdots⑥,\quad r>\frac{1}{2}\ \cdots\cdots⑦$$

また，円 C' は⑤から $y\geqq(a+r+s)-s>0$ となり $y>0$ に含まれ，条件(ii)から，

$$a+r+s=s^2+\frac{1}{4}\ \cdots\cdots⑧,\quad s>\frac{1}{2}\ \cdots\cdots⑨$$

⑥⑧より，$r^2+\dfrac{1}{4}+r+s=s^2+\dfrac{1}{4}$ から，$(r+s)(r-s)+r+s=0$ となり，

$$(r+s)(r-s+1)=0$$

⑦⑨から，$r+s>1$ なので，$s=r+1$ である。

［解 説］

放物線と円についてのよく見かける問題です。誘導は丁寧で，特に(4)は(3)の結果がストレートに利用できます。