

1

解答解説のページへ

A, B, C, D, E の 5 人が、それぞれゲーム  $\alpha$  とゲーム  $\beta$  の 2 種類のゲームを行った。

ゲーム  $\alpha$  の得点を  $x$ 、ゲーム  $\beta$  の得点を  $y$  で表す。右の表はそれぞれのゲームにおける

	A	B	C	D	E
得点 $x$	7	6	8	$a$	4
得点 $y$	0	-4	-1	2	$b$

得点である。ただし、 $a, b$  は整数である。なお、得点が負になることもあり得る。

ゲーム  $\alpha$  の得点  $x$  の平均値は 7 であるとし、ゲーム  $\beta$  の得点  $y$  の平均値を  $m$  とする。次の問いに答えよ。

- (1)  $a$  の値を求めよ。
- (2)  $p, q$  は実数で、 $p \neq 0$  とする。ゲーム  $\beta$  の得点  $y$  を  $z = py + q$  により変換し、新たな変数  $z$  を作成する。 $z$  の分散を  $s_z^2$ 、2 つの変数  $x, z$  の共分散を  $s_{xz}$  とする。このとき、 $s_z^2$  と  $s_{xz}$  を  $p, q, m$  のうちの必要なものを用いて表せ。ただし、変数  $x$  と  $z$  の共分散は  $x$  の偏差と  $z$  の偏差の積の平均値である。
- (3) 変数  $x$  と(2)で作った変数  $z$  の相関係数が  $\frac{3}{4}$  であるとき、 $m$  と  $b$  の値を求めよ。また、 $p$  が正であるか負であるかを答えよ。

2

解答解説のページへ

座標空間内の 4 点  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(1, 1, 0)$ ,  $B(0, 1, 1)$ ,  $C(1, 2, -1)$  に対し,  
 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$  とおく。次の問いに答えよ。

- (1) 内積  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{c}$ ,  $\vec{b} \cdot \vec{c}$  の値を求めよ。
- (2) 点  $O, A, B$  を通る平面を  $\alpha$  とする。点  $C$  から平面  $\alpha$  に下ろした垂線と平面  $\alpha$  の交点を  $M$  とする。点  $M$  の座標を求めよ。
- (3) 点  $M$  を(2)で定めた点とする。点  $D$  を直線  $CM$  上の点であって、 $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}|$  となるものとする。ただし、点  $D$  は点  $C$  とは異なる点である。このとき、点  $D$  の座標を求めよ。
- (4) 点  $D$  を(3)で定めた点とする。三角形  $CAD$  の面積  $S$  を求めよ。

3

解答解説のページへ

$x$  座標,  $y$  座標がともに整数である座標平面上の点を格子点と呼ぶことにする。座標平面上の 3 点を頂点にもつ三角形上の格子点とは、頂点、辺または内部に含まれている格子点のことをいう。四角形に対しても同様に四角形上の格子点を定めるものとする。 $O(0, 0)$  を座標平面上の原点とする。 $a$  と  $b$  を互いに素な自然数,  $n$  を自然数として、座標平面上の点  $P_n(an, 0)$ ,  $Q_n(0, bn)$  を考える。次の問いに答えよ。

- (1) 直線  $P_nQ_n$  上の格子点  $(x, y)$  で  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  を満たすものは、 $(ak, b(n-k))$  ( $k=0, 1, \dots, n$ ) のみであることを示せ。
- (2)  $P_1$  と  $Q_1$  をそれぞれ  $P$ ,  $Q$  と表す。点  $R(a, b)$  に対し、長方形  $OPRQ$  上の格子点の個数を  $a$  と  $b$  を用いて表せ。また、三角形  $OPQ$  上の格子点の個数を  $a$  と  $b$  を用いて表せ。
- (3) 三角形  $OP_nQ_n$  上の格子点の個数を  $a, b, n$  を用いて表せ。
- (4) 座標空間内の原点  $O(0, 0, 0)$  と 3 点  $X(an, 0, 0)$ ,  $Y(0, bn, 0)$ ,  $Z(0, 0, n)$  をとる。点  $O, X, Y, Z$  を 4 頂点とする四面体  $OXYZ$  上の格子点の個数を  $a, b, n$  を用いて表せ。ただし、 $x$  座標,  $y$  座標,  $z$  座標のすべてが整数である座標空間内の点を格子点と呼ぶことにする。また、四面体上の格子点とは、頂点、辺、面または内部に含まれている格子点のことをいう。

4

解答解説のページへ

複素数平面において、点  $1$  を中心とする半径  $\sqrt{2}$  の円を  $C$  とする。次の問いに答えよ。

- (1) 点  $\alpha$  が円  $C$  と虚軸との交点であるとき、 $\alpha + \frac{1}{\alpha}$  を求めよ。
- (2) 円  $C$  上の点  $z$  に対し、点  $-\frac{1}{z}$  も円  $C$  上にあることを示せ。
- (3) 円  $C$  上の点  $z$  に対し、 $w = z + \frac{1}{z}$  とする。複素数  $w, z$  は、 $|w - 2| = \frac{2}{|z|}$  を満たすことを示せ。
- (4) 円  $C$  上の点  $z$  に対し、(3)で定めた複素数  $w$  は、 $|w - 2||w + 2| = 4$  を満たすことを示せ。

5

解答解説のページへ

関数  $f(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$  に対し、次の問いに答えよ。

- (1) 曲線  $y = f(x)$  は  $x > 0$  で上に凸であることを示せ。
- (2) すべての  $x \geq 0$  に対し、不等式  $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \leq f(x) \leq x$  が成り立つことを示せ。
- (3) 定積分  $\int_0^{\frac{3}{4}} f(x) dx$  の値  $S$  を求めよ。
- (4) 曲線  $y = f(x)$  上の点で、 $x$  座標が  $\frac{3}{4}$  であるものを  $A$  とする。また、 $A$  における曲線  $y = f(x)$  の接線を  $l$  とする。 $l$  と直線  $y = x$  の交点を  $B$  とする。点  $O(0, 0)$ ,  $A$ ,  $B$  と点  $C(\frac{3}{4}, 0)$  を頂点にもつ四角形  $ABOC$  の面積  $T$  を求めよ。
- (5) (1)~(4)を利用して、 $\log 2$  の小数第 1 位の数字を求めよ。

1

問題のページへ

(1)  $x$  の平均値は 7 なので,  $\frac{7+6+8+a+4}{5} = 7$  から  $a = 10$  である。

(2)  $y$  の平均値は  $m$  なので,  $\frac{0-4-1+2+b}{5} = m$  から  $b = 5m + 3$  となり,

$$s_y^2 = \overline{y^2} - (\bar{y})^2 = \frac{0+16+1+4+(5m+3)^2}{5} - m^2 = \frac{25m^2+30m+30}{5} - m^2$$

$$= 4m^2 + 6m + 6$$

$$s_{xy} = \overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{0-24-8+20+4(5m+3)}{5} - 7m = \frac{20m}{5} - 7m = -3m$$

ここで,  $z = py + q$  から,  $s_z^2 = p^2 s_y^2$ ,  $s_{xz} = p s_{xy}$  となり,

$$s_z^2 = p^2(4m^2 + 6m + 6) = 2p^2(2m^2 + 3m + 3), \quad s_{xz} = -3pm$$

(3) まず,  $s_x^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = \frac{49+36+64+100+16}{5} - 49 = 4$  である。

ここで,  $x$  と  $z$  の相関係数が  $\frac{3}{4}$  から  $\frac{s_{xz}}{\sqrt{s_x^2} \sqrt{s_z^2}} = \frac{3}{4}$  となり,  $4s_{xz} = 3s_x s_z$  より,

$$-12pm = 3 \cdot 2 \sqrt{2p^2(2m^2 + 3m + 3)}, \quad -2pm = |p| \sqrt{2(2m^2 + 3m + 3)}$$

すると,  $-2pm \geq 0$  ( $pm \leq 0$ ) として, 両辺 2 乗すると,

$$4p^2 m^2 = 2p^2(2m^2 + 3m + 3), \quad 2m^2 = 2m^2 + 3m + 3$$

よって,  $3m + 3 = 0$  から  $m = -1$  となり,  $b = 5 \cdot (-1) + 3 = -2$  である。

また,  $p \neq 0$  かつ  $-p \leq 0$  から,  $p$  は正である。

### [解 説]

データの分析の内容で, 文系では 8 年ぶり, 理系は初めての出題です。なお, (2) では, 共分散についての公式  $s_{xy} = \overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}$ ,  $s_{xz} = p s_{xy}$  を, 説明なしに利用しています。

2

問題のページへ

(1)  $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = (1, 1, 0)$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b} = (0, 1, 1)$ ,  $\overrightarrow{OC} = \vec{c} = (1, 2, -1)$  に対して,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 + 1 + 0 = 1, \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = 1 + 2 + 0 = 3, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 + 2 - 1 = 1$$

(2) まず,  $|\vec{a}|^2 = 1 + 1 + 0 = 2$ ,  $|\vec{b}|^2 = 1 + 1 + 0 = 2$

ここで, 点 C から平面  $\alpha$  に下ろした垂線の足 M に対して,  $s, t$  を実数として  $\overrightarrow{OM} = s\vec{a} + t\vec{b}$  とおくと,

$$\overrightarrow{CM} = s\vec{a} + t\vec{b} - \vec{c}$$

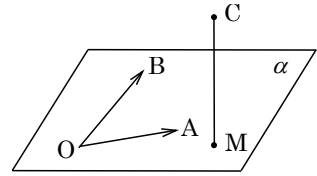
$\overrightarrow{CM} \perp \vec{a}$  から  $\overrightarrow{CM} \cdot \vec{a} = 0$  となり,  $s \cdot 2 + t \cdot 1 - 3 = 0$  から,  $2s + t = 3 \dots\dots\dots \textcircled{1}$

$\overrightarrow{CM} \perp \vec{b}$  から  $\overrightarrow{CM} \cdot \vec{b} = 0$  となり,  $s \cdot 1 + t \cdot 2 - 1 = 0$  から,  $s + 2t = 1 \dots\dots\dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}\textcircled{2}$  より,  $s = \frac{5}{3}$ ,  $t = -\frac{1}{3}$  となり,

$$\overrightarrow{OM} = \frac{5}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} = \frac{5}{3}(1, 1, 0) - \frac{1}{3}(0, 1, 1) = \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

よって, 点 M の座標は  $M\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$  である。



(3) 平面  $\alpha$  に垂直な直線 CM 上の点 D が  $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}|$

( $C \neq D$ ) を満たすとき, 点 D は平面  $\alpha$  について点 C と面  
対称な点である。すなわち, 点 D は線分 CM を 2:1 に

外分することより, その座標は,

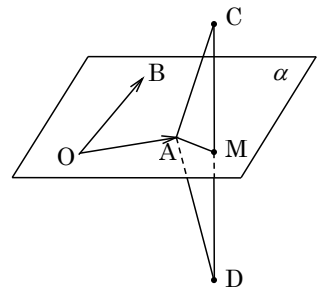
$$\frac{1}{2-1} \left( \frac{10}{3} - 1, \frac{8}{3} - 2, -\frac{2}{3} + 1 \right) = \left( \frac{7}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

(4)  $AM \perp CD$  から,  $\triangle CAD$  の面積  $S$  は,

$$S = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AM = \frac{1}{2} \cdot 2CM \cdot AM = CM \cdot AM$$

$$= \sqrt{\left(\frac{5}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - 2\right)^2 + \left(-\frac{1}{3} + 1\right)^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{5}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - 1\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$$



[解説]

空間ベクトルについての基本題で, 頻出タイプの構図です。

3

問題のページへ

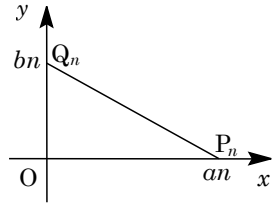
- (1) 互いに素な自然数  $a$  と  $b$ , 自然数  $n$  に対して,  $P_n(an, 0)$ ,  $Q_n(0, bn)$  とすると, 直線  $P_nQ_n$  の方程式は,

$$\frac{x}{an} + \frac{y}{bn} = 1, \quad y = bn\left(1 - \frac{x}{an}\right) = -\frac{b}{a}x + bn$$

線分  $P_nQ_n$  上の格子点  $(x, y)$  は,  $a$  と  $b$  が互いに素から  $x$  は  $a$  の倍数となり,  $0 \leq x \leq an$  から  $x = ak$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) とおくと,

$$y = -\frac{b}{a} \cdot ak + bn = b(n-k)$$

すなわち,  $(x, y) = (ak, b(n-k))$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) である。



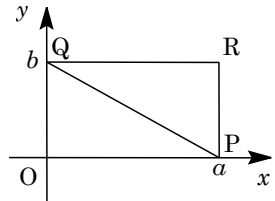
- (2)  $P(a, 0)$ ,  $Q(0, b)$ ,  $R(a, b)$  に対して, 長方形  $OPRQ$  上の格子点  $(x, y)$  は,  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$  であるので, その個数は  $(a+1)(b+1)$  となる。

線分  $PQ$  上の格子点  $(x, y)$  は,  $(ak, b(1-k))$  ( $k = 0, 1$ )

記すことができるので, その個数は 2 である。

これより, 三角形  $OPQ$  上の格子点の個数は,

$$\frac{(a+1)(b+1) - 2}{2} + 2 = \frac{ab + a + b + 3}{2}$$



- (3) (2) と同様と考えて  $R_n(an, bn)$  とおくと, 長方形  $OP_nR_nQ_n$  上の格子点の個数は,  $(an+1)(bn+1)$

また, 線分  $P_nQ_n$  上の格子点の個数は, (1) から  $n+1$  である。

これより, 三角形  $OP_nQ_n$  上の格子点の個数は,

$$\frac{(an+1)(bn+1) - (n+1)}{2} + (n+1) = \frac{abn^2 + (a+b+1)n + 2}{2}$$

- (4)  $X(an, 0, 0)$ ,  $Y(0, bn, 0)$ ,  $Z(0, 0, n)$  に対して,  $z$

平面  $XYZ$  の方程式は,

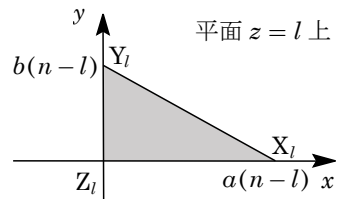
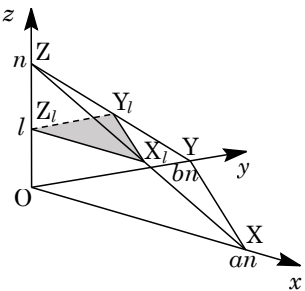
$$\frac{x}{an} + \frac{y}{bn} + \frac{z}{n} = 1 \dots\dots\dots (*)$$

$Z_l(0, 0, l)$  とおき, 平面  $z = l$  ( $l = 0, 1, \dots, n$ ) と線分  $ZX$ ,  $ZY$  との交点を, それぞれ  $X_l$ ,  $Y_l$  とおく。

(\*) に  $z = l$  を代入すると,  $\frac{x}{an} + \frac{y}{bn} = 1 - \frac{l}{n}$  となり,

$$\text{直線 } X_lY_l: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = n-l \text{ かつ } z = l$$

これより,  $X_l(a(n-l), 0, l)$ ,  $Y_l(0, b(n-l), l)$  となる。そして, 三角形  $Z_lX_lY_l$  上の格子点の個数を  $N_l$  とおくと, (3) の結果から,





$$N_l = \frac{ab(n-l)^2 + (a+b+1)(n-l) + 2}{2}$$

そこで、四面体 OXYZ 上の格子点の個数を  $N$  とおくと、

$$N = \sum_{l=0}^n N_l = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^n \{ab(n-l)^2 + (a+b+1)(n-l) + 2\}$$

さらに、 $m = n-l$  と置き換えると、

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^n \{abm^2 + (a+b+1)m + 2\} \\ &= \frac{ab}{2} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + \frac{a+b+1}{2} \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + \frac{1}{2} \cdot 2(n+1) \\ &= \frac{n+1}{12} \{abn(2n+1) + 3(a+b+1)n + 12\} \\ &= \frac{1}{12} (n+1) \{2abn^2 + (ab+3a+3b+3)n + 12\} \end{aligned}$$

### [解説]

四面体の内部または面上にある格子点の個数を数える問題です。(1)→(2)→(3)→(4)と、非常に丁寧な誘導がついています。

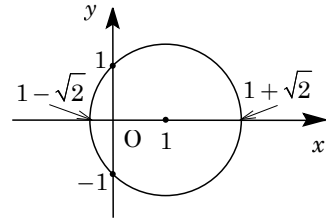
4

問題のページへ

(1) 円  $C: |z-1| = \sqrt{2}$  ……①と虚軸との交点  $\alpha$  について、

$$\cdot \alpha = i \text{ のとき } \alpha + \frac{1}{\alpha} = i + \frac{1}{i} = i - i = 0$$

$$\cdot \alpha = -i \text{ のとき } \alpha + \frac{1}{\alpha} = -i - \frac{1}{i} = -i + i = 0$$

よって、 $\alpha + \frac{1}{\alpha} = 0$  である。(2)  $u = -\frac{1}{z}$  とおくと  $z = -\frac{1}{u}$  となり、①に代入すると  $|\frac{1}{u} - 1| = \sqrt{2}$  から、

$$\left| \frac{1-u}{u} \right| = \sqrt{2}, \quad \frac{|1-u|}{|u|} = \sqrt{2}, \quad |1-u| = \sqrt{2}|u|$$

両辺 2 乗すると、 $|1-u|^2 = 2|u|^2$  から、 $(1-u)(\bar{1}-\bar{u}) = 2u\bar{u}$  となり、

$$1 - u - \bar{u} + 1 = 2|u|^2, \quad (1-u)(1-\bar{u}) = 2|u|^2$$

よって、 $|u-1| = \sqrt{2}$  ……②から、点  $u$  も円  $C$  上にある。(3)  $w = z + \frac{1}{z}$  のとき、 $w - 2 = z + \frac{1}{z} - 2 = \frac{z^2 + 1 - 2z}{z} = \frac{(z-1)^2}{z}$  となり、①から、

$$|w-2| = \left| \frac{(z-1)^2}{z} \right| = \frac{|z-1|^2}{|z|} = \frac{2}{|z|} \dots\dots\dots ③$$

(4)  $w + 2 = z + \frac{1}{z} + 2 = -\frac{1}{u} - u + 2 = -\frac{1+u^2-2u}{u} = -\frac{(u-1)^2}{u}$  となり、②から、

$$|w+2| = \left| -\frac{(u-1)^2}{u} \right| = \frac{|u-1|^2}{|u|} = \frac{2}{|u|} = 2|-z| = 2|z| \dots\dots\dots ④$$

③④より、 $|w-2||w+2| = \frac{2}{|z|} \cdot 2|z| = 4$  となる。

## [解説]

複素数平面上の変換を題材にした問題です。(4)の設問に、一見、誘導とは思えない(2)の結論が役立っています。

5

問題のページへ

(1)  $f(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$  に対して,

$$f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

すると,  $x > 0$  で  $f''(x) < 0$  なので, 曲線  $y = f(x)$  は  $x > 0$  で上に凸である。(2)  $x \geq 0$  のとき,  $g(x) = x - f(x)$  とおくと,  $g'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0$  となり,

$$g(x) \geq g(0) = 0, \quad x \geq f(x) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

また,  $x \geq 0$  のとき,  $h(x) = f(x) - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$  とおくと,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{1+x^2} \left( \sqrt{1+x^2} - x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{(1+x^2) - x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \geq 0 \end{aligned}$$

これより,  $h(x) \geq h(0) = 0$  となり,  $f(x) \geq \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdots \cdots \textcircled{2}$ ①②より,  $x \geq 0$  のとき,  $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \leq f(x) \leq x$  が成り立つ。(3)  $S = \int_0^{\frac{3}{4}} f(x) dx = \int_0^{\frac{3}{4}} \log(x + \sqrt{1+x^2}) dx$ 

$$= [x \log(x + \sqrt{1+x^2})]_0^{\frac{3}{4}} - \int_0^{\frac{3}{4}} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{3}{4} \log\left(\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{25}{16}}\right) - [\sqrt{1+x^2}]_0^{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{3}{4} \log 2 - (\sqrt{\frac{25}{16}} - 1) = \frac{3}{4} \log 2 - \frac{1}{4}$$

(4) 曲線  $y = f(x)$  上の点  $A\left(\frac{3}{4}, \log 2\right)$  における接線  $l$ の方程式は,  $f'\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{4}{5}$  から,  $y - \log 2 = \frac{4}{5}\left(x - \frac{3}{4}\right)$ 

$$y = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5} + \log 2$$

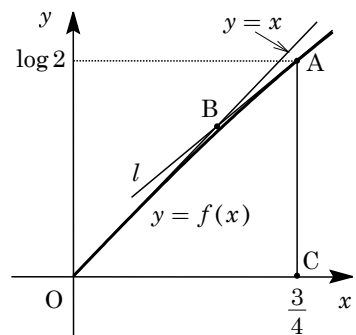
 $y = x$  との交点  $B$  は,  $x = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5} + \log 2$  から,

$$B(5\log 2 - 3, 5\log 2 - 3)$$

 $C\left(\frac{3}{4}, 0\right)$  とするとき, 四角形  $ABOC$  の面積  $T$  は,

$$T = \triangle OCB + \triangle ACB = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} (5\log 2 - 3) + \frac{1}{2} (\log 2) \left(\frac{3}{4} - 5\log 2 + 3\right)$$

$$= \frac{1}{8} \{(15\log 2 - 9) + (\log 2)(15 - 20\log 2)\} = -\frac{5}{2}(\log 2)^2 + \frac{15}{4}\log 2 - \frac{9}{8}$$



(5) 曲線  $y = f(x)$  は  $x > 0$  で上に凸なので,  $S < T$  であり,

$$\frac{3}{4}\log 2 - \frac{1}{4} < -\frac{5}{2}(\log 2)^2 + \frac{15}{4}\log 2 - \frac{9}{8}, \quad 20(\log 2)^2 - 24\log 2 + 7 < 0$$

すると,  $(2\log 2 - 1)(10\log 2 - 7) < 0$  から,  $\frac{1}{2} < \log 2 < \frac{7}{10}$  ……③

また, (2) から  $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \leq f(x)$  なので,  $\int_0^{\frac{3}{4}} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx \leq \int_0^{\frac{3}{4}} f(x) dx$  となり,

$$\frac{1}{4} \leq \frac{3}{4}\log 2 - \frac{1}{4}, \quad \log 2 \geq \frac{2}{3} \dots\dots\dots ④$$

③④より,  $\frac{2}{3} \leq \log 2 < \frac{7}{10}$  となるので,  $\log 2$  の小数第 1 位の数字は 6 である。

### [解説]

詳しい誘導のついた定積分と不等式の問題です。なお, (5) では, ③だけでは  $\log 2$  の小数第 1 位の数字が決まらないので, この設問で利用していない(2)の左側の不等式を再登場させて処理をしています。