1

解答解説のページへ

三角形 ABC において，3 つの角の大きさの比が $A : B : C = 7 : 4 : 1$，辺 AB の長さが 1 とする。

(1)　$\sin A$，$\sin C$ の値を求めよ。

(2)　辺 BC の長さを求めよ。

2

解答解説のページへ

2 次関数 $f(x)=px^2+qx+r$ は，次の(i), (ii)を満たすとする。

(i)　$y=f(x)$ のグラフ上の点 $(x,\ f(x))$ における接線の傾きは $-4x+8$ である。

(ii)　$y=f(x)$ のグラフは x 軸と異なる 2 点で交わる。

(1)　$p,\ q$ の値と r の範囲を求めよ。

(2)　$y=f(x)$ のグラフが x 軸と交わる 2 点を A, B, y 軸と交わる点を C とし，三角形 ABC の面積を T とする。また，$y=f(x)$ のグラフが x 軸とで囲まれる図形の面積を S とする。$S=4T$ となるような r の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

xy 平面の点 O$(0,\ 0)$，A$(1,\ 1)$，B$(2,\ -1)$ と実数 k に対して，点 C は

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

を満たすとする。

(1) 内積 $(\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が $2k$ となる点 P の描く図形は, C を通り，直線 OA と直交する直線であることを示せ。

(2) $\angle\mathrm{ACB}$ の大きさが 45° となる k を求めよ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

xy 平面上に原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円 C とその上の点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$ がある。円 C 上を動く点 P に対して，3 点 O，A，P が三角形をつくるとき，その三角形の重心を G とする。

(1)　G の軌跡を求めよ。

(2)　円 C 上の点 $\mathrm{P}_0\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ に対する三角形 OAP_0 の重心を G_0 とする。(1)で求めた軌跡の G_0 における接線が x 軸と交わる点の座標を求めよ。

5

解答解説のページへ

A と B の 2 人が同時に 1 個ずつサイコロを振り，出た目を比較して，大きい目を出した方の得点は 1，他方の得点は 0，となる試行を考える。ただし，2 つのサイコロの出た目が同じなら，A, B のいずれの得点も 0 とする。

(1)　この試行を 1 回行うとき，A の得点が 1 となる確率を p，B の得点が 1 となる確率を q，いずれの得点も 0 となる確率を r とする。p, q, r を求めよ。

(2)　この試行を 2 回行うとき，A の合計得点が B の合計得点より多くなる確率を求めよ。

(3)　この試行を 3 回行うとき，A の合計得点が B の合計得点より 1 点多くなる確率を求めよ。

$\boxed{1}$ 問題のページへ

(1)　$A=180°\times\dfrac{7}{12}=105°$，$C=180°\times\dfrac{1}{12}=15°$ より，

$$\sin A=\sin 105°=\sin(60°+45°)$$
$$=\sin 60°\cos 45°+\cos 60°\sin 45°=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$
$$\sin C=\sin 15°=\sin(60°-45°)$$
$$=\sin 60°\cos 45°-\cos 60°\sin 45°=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(2)　正弦定理より，$\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin A}=\dfrac{1}{\sin C}$

(1)から，$\mathrm{BC}=\dfrac{\sin A}{\sin C}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=2+\sqrt{3}$

［解 説］

制限時間 5 分の超基本題です。本問も含め, 昨年度よりはかなり易しくなっています。

2

問題のページへ

(1)　(i)より，$f'(x)=-4x+8$ から，$f(x)=\int(-4x+8)\,dx=-2x^2+8x+C$

$f(x)=px^2+qx+r$ から，$p=-2$，$q=8$

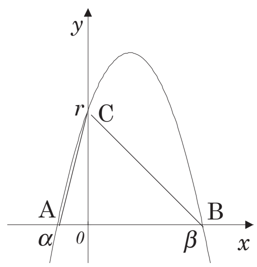
よって，$f(x)=-2x^2+8x+r$

(ii)より，$f(x)=0$ の判別式が正より，$D/4=16+2r>0$，$r>-8$

(2)　$\mathrm{A}(\alpha,\ 0)$，$\mathrm{B}(\beta,\ 0)$ とすると，α，β は $f(x)=0$ の 2 つの解となる。

$\alpha<\beta$ とすると，$\alpha=\dfrac{4-\sqrt{16+2r}}{2}$，$\beta=\dfrac{4+\sqrt{16+2r}}{2}$

$$\beta-\alpha=\sqrt{16+2r}\ \cdots\cdots\cdots(*)$$



ここで，$T=\dfrac{1}{2}(\beta-\alpha)|r|$

$$S=\int_\alpha^\beta -2(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3$$

条件から，$S=4T$

$$\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3=4\cdot\frac{1}{2}(\beta-\alpha)|r|,\ (\beta-\alpha)^2=6|r|$$

$(*)$から，$16+2r=6|r|$，$16+2r=\pm6r$

よって，$r=4$，-2

［解 説］

センター試験レベルの問題です。(2)では，図に気をとられすぎると，r に絶対値をつけ忘れしそうです。

3

問題のページへ

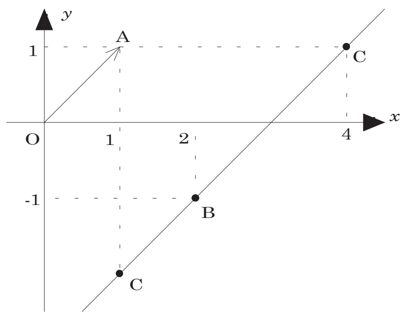
(1)　$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=2k$ に $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を代入して，

$$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}+k\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=2k,\ (\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=2k$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=2$ より，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2k=2k$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$

すなわち，点 P は C を通り，直線 OA と直交する直線を描く。

(2)　$\angle\mathrm{ACB}=45^\circ$ となる点 C の位置は，右図のように 2 箇所ある。



点 C は点 B を通り，傾きが 1 の直線 OA に平行な直線上の点なので，線分 AC は x 軸に平行か，または y 軸に平行となる。

すなわち点 C の座標は $(4,\ 1)$，$(1,\ -2)$ となる。

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ から，$k=2,\ -1$

［解 説］

(2)では，最初は(1)の結論を用いようとしたのですが，結局，図形的な意味を考えた解に落ち着きました。計算のみでも押し通せますが，やってみたところ, 3 倍程度の記述量が必要でした。

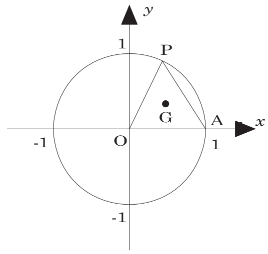
4

問題のページへ

(1)　$\mathrm{G}(x,\ y)$, $\mathrm{P}(s,\ t)$とおくと，$(s,\ t)\neq(1,\ 0)$, $(-1,\ 0)$として，

$$s^2+t^2=1\cdots\cdots\cdots①$$

$$x=\frac{s+1}{3}\cdots\cdots\cdots②,\quad y=\frac{t}{3}\cdots\cdots\cdots③$$



②③より，$s=3\left(x-\frac{1}{3}\right)$, $t=3y$

①に代入すると，$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+y^2=\frac{1}{9}$

ただし，$(x,\ y)\neq\left(\frac{2}{3},\ 0\right)$, $(0,\ 0)$

よってGの軌跡は，円：$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+y^2=\frac{1}{9}$，ただし原点と点$\left(\frac{2}{3},\ 0\right)$は除く。

(2)　G_0の座標は，$x=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)=\frac{\sqrt{3}+2}{6}$, $y=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

G_0における接線は$\left(\frac{\sqrt{3}+2}{6}-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{6}y=\frac{1}{9}$

$$\frac{\sqrt{3}}{6}\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{6}y=\frac{1}{9}$$

x軸との交点は$y=0$として，$\frac{\sqrt{3}}{6}\left(x-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{9}$, $x=\frac{2}{9}\sqrt{3}+\frac{1}{3}$

これから，求める交点の座標は，$\left(\frac{2}{9}\sqrt{3}+\frac{1}{3},\ 0\right)$

［解　説］

(2)は，接線を公式処理して計算で押し通し，交点の座標を求めました。なお，P_0の座標が，$(\cos 30°,\ \sin 30°)$となることに注目して，図形的に考えてもOKです。

$\boxed{5}$ 問題のページへ

(1) いずれも 0 点となるのは 6 通りより，その確率は $r=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$

また, A の得点が 1 点となる場合と B の得点が 1 点となる場合は対等なので, $p=q$ となる。

よって，$p=q=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{5}{12}$

(2) (i)　A が 2 点, B が 0 点の場合

その確率は，$p^2=\left(\dfrac{5}{12}\right)^2=\dfrac{25}{12^2}$

(ii) A が 1 点, B が 0 点の場合

その確率は，${}_2\mathrm{C}_1pr=2\cdot\dfrac{5}{12}\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{20}{12^2}$

(i)(ii)より，求める確率は，$\dfrac{25}{12^2}+\dfrac{20}{12^2}=\dfrac{45}{12^2}=\dfrac{5}{16}$

(3) (i)　A が 2 点, B が 1 点の場合

その確率は，${}_3\mathrm{C}_2p^2q=3\cdot\left(\dfrac{5}{12}\right)^2\cdot\dfrac{5}{12}=\dfrac{375}{12^3}$

(ii) A が 1 点, B が 0 点の場合

その確率は，${}_3\mathrm{C}_1pr^2=3\cdot\dfrac{5}{12}\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)^2=\dfrac{60}{12^3}$

(i)(ii)より，求める確率は，$\dfrac{375}{12^3}+\dfrac{60}{12^3}=\dfrac{435}{12^3}=\dfrac{145}{576}$

［解 説］

(2), (3)とも丁寧に考えていけば，完答できる問題です。ケアレス・ミスだけが恐いよく見かける頻出題です。