$\boxed{1}$

解答解説のページへ

行列$A=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -x \\ x & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $(x \geqq 0)$に対して，$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}+A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}+A^2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$が成り立つとする。

(1)　xを求めよ。

(2)　A^3を求めよ。

(3)　自然数nに対して，$A^{2n}+A^n+E$を求めよ。ただし，$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$である。

2

解答解説のページへ

空間に 4 点 $P_1\left(0,\ \dfrac{\sqrt{5}-1}{2},\ 1\right)$，$P_2\left(0,\ -\dfrac{\sqrt{5}-1}{2},\ 1\right)$，$P_3\left(1,\ 0,\ \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$，$P_4\left(-1,\ 0,\ \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$を定め，線分 P_1P_2 の中点を Q とする。

(1)　内積 $\overrightarrow{P_2P_1}\cdot\overrightarrow{QP_3}$ と $\overrightarrow{P_2P_1}\cdot\overrightarrow{QP_4}$ を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{QP_3}$ と $\overrightarrow{QP_4}$ のなす角を θ とするとき，$\sin\theta$ の値を求めよ。

(3)　四面体 $P_1P_2P_3P_4$ の体積を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

閉区間$\left[-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right]$上の関数$f(x)$を次の式で定義する。

$$f(x)=\int_x^{x+1}\log\left(\left|t-\frac{1}{2}\right|+\frac{1}{2}\right)dt$$

(1)　$f(x)$の導関数$f'(x)$　$\left(-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2}\right)$を求めよ。

(2)　$f(x)$を最小にするxの値aと，そのときの最小値を求めよ。

(3)　(2)で求めたaに対して，$\displaystyle\int_a^{a+1}t\log\left(\left|t-\frac{1}{2}\right|+\frac{1}{2}\right)dt$を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

曲線 C は媒介変数 θ を用いて

$$C : x = \cos^2\theta - \sqrt{3}\sin\theta\cos\theta,\quad y = \sin\theta\cos\theta - \sqrt{3}\sin^2\theta \quad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{5}{12}\pi\right)$$

と表されている。

(1)　曲線 C が

$$C : x = a + b\cos(2\theta + A),\quad y = c + d\sin(2\theta + A) \quad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{5}{12}\pi\right)$$

と表されるような $a, b, c, d, A\,(0 \leqq A < \pi)$ を求めよ。

(2)　曲線 C の長さを求めよ。

5

解答解説のページへ

自然数 n に対して，関数 $f_n(x)=p_ne^{nx}+q_ne^{-nx}$ が $f_n(0)=1$， $f_n'(1)=-n$ を満たすとする。

(1) p_n と q_n を求め，$f_n'(x)<0$ を示せ。

(2) 方程式 $f_n(x)=0$ の解 z_n を求めよ。

(3) 数列 $\{z_n\}$ に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}z_n$ を求めよ。

6

解答解説のページへ

A と B の 2 人がジャンケンをする。A がグー, チョキ, パーを出す確率をそれぞれ x, y, z とし, B がグー, チョキ, パーを出す確率をそれぞれ p, q, r とする。1 回のジャンケンの結果, A は次の表のような点を得る。

A の得点表

	B がグー	B がチョキ	B がパー
A がグー	0	3	-6
A がチョキ	-3	0	5
A がパー	6	-5	0

このとき, A の得点の期待値を E で表す。

(1)　$p=q=r=\dfrac{1}{3}$ のとき, E を最大にする x, y, z と, そのときの最大値を求めよ。

(2)　「B が確率 p, q, r をどのようにとっても $E=0$」となるには, A は確率 x, y, z をどのようにとればよいか。

1　　問題のページへ

(1)　ハミルトン・ケーリーの定理より，

$$A^2+A+\left(\frac{1}{4}+x^2\right)E=O,\quad A^2=-A-\left(\frac{1}{4}+x^2\right)E \cdots\cdots\cdots ①$$

条件より，$(E+A+A^2)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots ②$

①を②に代入して，$\left\{1-\left(\frac{1}{4}+x^2\right)\right\}E\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，$\left(\frac{3}{4}-x^2\right)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

よって，$\frac{3}{4}-x^2=0$，$x\geqq 0$ より $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2)　(1)より，$A^2=-A-E$

$$A^3=A\cdot A^2=A(-A-E)=-A^2-A=-(-A-E)-A=E$$

(3)　(2)より, n を自然数として，$A^{3n}=E$

(i)　$n=3k+1$　$(k\geqq 0)$のとき

$$A^{2n}+A^n+E=A^{6k+2}+A^{3k+1}+E=A^2+A+E=O$$

(ii)　$n=3k+2$　$(k\geqq 0)$のとき

$$A^{2n}+A^n+E=A^{6k+4}+A^{3k+2}+E=A+A^2+E=O$$

(iii)　$n=3k+3$　$(k\geqq 0)$のとき

$$A^{2n}+A^n+E=A^{6k+6}+A^{3k+3}+E=E+E+E=3E$$

以上より, n が 3 の倍数のとき $3E$, n が 3 の倍数でないとき O となる。

［解 説］

(2)は，$A^2+A+E=O$ から両辺に $A-E$ をかけて，$A^3-E=O$，$A^3=E$ とする解法もあります。複素数の「ω の問題」と同じ構図です。

2

問題のページへ

(1) $\overrightarrow{\mathrm{P_2P_1}}=(0,\ \sqrt{5}-1,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{QP_3}}=\left(1,\ 0,\ \dfrac{\sqrt{5}-3}{2}\right)$より，$\overrightarrow{\mathrm{P_2P_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QP_3}}=0$

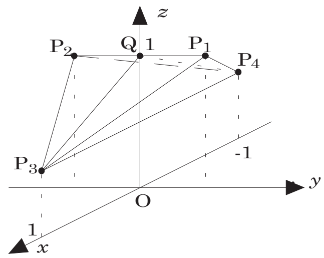
また，$\overrightarrow{\mathrm{QP_4}}=\left(-1,\ 0,\ \dfrac{\sqrt{5}-3}{2}\right)$より，$\overrightarrow{\mathrm{P_2P_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QP_4}}=0$

(2) $l=\mathrm{QP_3}=\mathrm{QP_4}$とおくと，

$$l^2=1+\frac{(\sqrt{5}-3)^2}{4}=\frac{9-3\sqrt{5}}{2}$$

$$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=2\cdot\frac{1}{l}\cdot\frac{1-\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}{l}$$

$$=2\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{9-3\sqrt{5}}=\frac{2}{3}$$



(3) (1)より，$\mathrm{P_1P_2}$は平面$\mathrm{QP_3P_4}$に垂直である。

また(2)より，$\triangle\mathrm{QP_3P_4}=\dfrac{1}{2}l^2\sin\theta=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{9-3\sqrt{5}}{2}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

四面体$\mathrm{P_1P_2P_3P_4}$の体積をVとすると，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{QP_3P_4}\cdot\mathrm{P_1P_2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot(\sqrt{5}-1)=\frac{1}{3}(2\sqrt{5}-4)$$

［解 説］

一見、複雑そうでますが，図形に対称性があるので，見かけほどではありません。(2)では，内積を利用して$\cos\theta$，さらに$\sin\theta$を求める解もありますが，少々計算が複雑です。

3

問題のページへ

(1)　$g(t)=\log\left(\left|t-\dfrac{1}{2}\right|+\dfrac{1}{2}\right)$とおくと,

$$f'(x)=g(x+1)(x+1)'-g(x)=\log\left(\left|x+\frac{1}{2}\right|+\frac{1}{2}\right)-\log\left(\left|x-\frac{1}{2}\right|+\frac{1}{2}\right)$$

$-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2}$より，$x+\dfrac{1}{2}>0$，$x-\dfrac{1}{2}<0$となるので,

$$f'(x)=\log\left(x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)-\log\left(-x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\log(x+1)-\log(-x+1)$$

(2)　$f'(x)=0$の解は，$x+1=-x+1$より$x=0$

$x=0$のとき，$f(x)$は最小値をとるので,

x	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$a=0$となる。最小値は,

$$f(0)=\int_0^1\log\left(\left|t-\frac{1}{2}\right|+\frac{1}{2}\right)dt$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\log\left(-t+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)dt+\int_{\frac{1}{2}}^1\log\left(t-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)dt$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\log(-t+1)\,dt+\int_{\frac{1}{2}}^1\log t\,dt$$

ここで，$-t+1=s$とおくと，$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\log(-t+1)\,dt=\int_1^{\frac{1}{2}}\log s(-ds)=\int_{\frac{1}{2}}^1\log s\,ds$

よって，$\displaystyle f(0)=2\int_{\frac{1}{2}}^1\log t\,dt=2\Big[\,t\log t-t\,\Big]_{\frac{1}{2}}^1=2\left(-\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=\log 2-1$

(3)　$\displaystyle I=\int_0^1 t\log\left(\left|t-\frac{1}{2}\right|+\frac{1}{2}\right)dt=\int_0^{\frac{1}{2}}t\log(-t+1)\,dt+\int_{\frac{1}{2}}^1 t\log t\,dt$

ここで，$-t+1=s$とおくと,

$$\int_0^{\frac{1}{2}}t\log(-t+1)\,dt=\int_1^{\frac{1}{2}}(1-s)\log s(-ds)=\int_{\frac{1}{2}}^1(1-s)\log s\,ds$$

よって，$\displaystyle I=\int_{\frac{1}{2}}^1(1-t)\log t\,dt+\int_{\frac{1}{2}}^1 t\log t\,dt=\int_{\frac{1}{2}}^1\log t\,dt=\frac{1}{2}(\log 2-1)$

［解 説］

(3)の積分は, (2)の$f(0)$の値を使うらしいということが，問題文から匂ってきます。実際，そのとおりになりました。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1) $x=\cos^2\theta-\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}-\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sin 2\theta}{2}$

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2\theta-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta=\dfrac{1}{2}+\cos\left(2\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$

$y=\sin\theta\cos\theta-\sqrt{3}\sin^2\theta=\dfrac{\sin 2\theta}{2}-\sqrt{3}\cdot\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

$=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\sin 2\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$

よって，$a=\dfrac{1}{2}$，$b=1$，$c=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$d=1$，$A=\dfrac{\pi}{3}$

(2) $0\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{12}\pi$ より，$\dfrac{\pi}{3}\leqq 2\theta+\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{7}{6}\pi$ となる。

(1)より，曲線 C は中心$\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，半径 1 の円弧で，中心角は $\dfrac{7}{6}\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5}{6}\pi$ より，その長さは，$1\cdot\dfrac{5}{6}\pi=\dfrac{5}{6}\pi$ となる。

［解 説］

(1)に cos での合成が出ました。今年のセンター試験にも出て，出来が悪かったところです。なお，(2)の弧長を求めるのに，積分を利用してももちろん構いません。しかし，これは「やりすぎ」というものです。

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1)　$f_n(x) = p_n e^{nx} + q_n e^{-nx}$，$f_n{}'(x) = n(p_n e^{nx} - q_n e^{-nx})$

条件より，$f_n(0) = p_n + q_n = 1$ ………①

$f_n{}'(1) = n(p_n e^n - q_n e^{-n}) = -n$ より，$e^n p_n - \dfrac{1}{e^n} q_n = -1$ ………②

①②より，$\left(e^n + \dfrac{1}{e^n}\right) p_n = -1 + \dfrac{1}{e^n}$，$p_n = \dfrac{1 - e^n}{1 + e^{2n}}$

①から，$q_n = 1 - \dfrac{1 - e^n}{1 + e^{2n}} = \dfrac{e^n(1 + e^n)}{1 + e^{2n}}$

また，$n \geqq 1$ より $e^n > 1$ となり，$p_n < 0$，$q_n > 0$

よって，$f_n{}'(x) < 0$

(2)　$f_n(x) = 0$ より，$\dfrac{1 - e^n}{1 + e^{2n}} e^{nx} + \dfrac{e^n(1 + e^n)}{1 + e^{2n}} e^{-nx} = 0$

$$(1 - e^n)e^{2nx} + e^n(1 + e^n) = 0,\quad e^{2nx} = \frac{e^n(e^n + 1)}{e^n - 1}$$

$x = \dfrac{1}{2n} \log \dfrac{e^n(e^n + 1)}{e^n - 1}$ より，$z_n = \dfrac{1}{2n} \log \dfrac{e^n(e^n + 1)}{e^n - 1}$

(3)　$\displaystyle \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \log \frac{e^n(e^n + 1)}{e^n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n}\left(\log e^n + \log \frac{e^n + 1}{e^n - 1}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\log e + \frac{1}{2n}\log\frac{1 + e^{-n}}{1 - e^{-n}}\right) = \frac{1}{2}$$

［解　説］

昨年度の調子で，もう「ひとひねり」あると思って解くと，肩すかしをくらってしまいます。たとえば，(1)の $f_n{}'(x) < 0$ を示すのに，$f_n{}''(x)$ を計算して $f_n{}'(x)$ の増減を調べようとすると，たいへんなことになります。また(3)についても同様です。このように，素直に考えれば素直に解けるという問題です。

6

問題のページへ

(1) $E=3\cdot\dfrac{1}{3}x-6\cdot\dfrac{1}{3}x-3\cdot\dfrac{1}{3}y+5\cdot\dfrac{1}{3}y+6\cdot\dfrac{1}{3}z-5\cdot\dfrac{1}{3}z$

$=-x+\dfrac{2}{3}y+\dfrac{1}{3}z=-x+\dfrac{2}{3}y+\dfrac{1}{3}(1-x-y)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{1}{3}y$

ここで，$y=k\ \ (0\leqq k\leqq 1)$ と固定すると，$E=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{1}{3}k+\dfrac{1}{3}$

すると, x の増加に伴って E は減少するので，$0\leqq x\leqq 1-k$ から，どんな k に対しても $x=0$ のとき, E は最大となる。

この $x=0$ の状態を保ったまま y を変化させると，$E=\dfrac{1}{3}y+\dfrac{1}{3}$ より，y の増加に伴って E は増加する。よって，$y=1$ のとき E は最大となる。

このとき，$z=1-x-y=0$ となり，E は $(x,\ y,\ z)=(0,\ 1,\ 0)$ において最大値 $\dfrac{2}{3}$ をとる。

(2) $E=-3yp+6zp+3xq-5zq-6xr+5yr$

$=(-3y+6z)p+(3x-5z)q+(-6x+5y)r$

$p,\ q,\ r$ をどのようにとっても $E=0$ となる条件は，まず $(p,\ q,\ r)=(1,\ 0,\ 0)$, $(0,\ 1,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 1)$ に対して $E=0$ となることが必要なので,

$-3y+6z=0$ ………①，$3x-5z=0$ ………②，$-6x+5y=0$ ………③

逆に, ①②③が成立するとき任意の p, q, r に対して $E=0$ となる。

①より $y=2z$ ……④，②より $x=\dfrac{5}{3}z$ ……⑤

④⑤を③に代入すると $-6\cdot\dfrac{5}{3}z+5\cdot 2z=0$ となり，成立する。

ここで，$x+y+z=1$ に④⑤を代入すると，$\dfrac{14}{3}z=1$，$z=\dfrac{3}{14}$

以上より，$x=\dfrac{5}{14}$，$y=\dfrac{3}{7}$，$z=\dfrac{3}{14}$

［解 説］

期待値の計算自体は簡単ですが, 問われているものは, (1)では 1 変数固定という手法を用いた 2 変数関数の取り扱い, (2)では同値の条件を求めるのに必要条件を求めて後, 十分性を確認するという手法です。上の解では，その点をやや詳しく書いてみました。