$\boxed{1}$　解答解説のページへ

2 点$(1,\ 1)$，$(-1,\ 5)$を通る 2 次関数のグラフについて，頂点を$(p,\ q)$，y 軸との交点を$(0,\ k)$とする。

(1)　p, q を k で表せ。

(2)　p, q がともに正のとき，k の値の範囲を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

a を正の定数とし，$f(x)=\log_2(a+x)+\log_4(a-x)$ とする。

(1)　$f(x)$ が最大となる x の値を求めよ。

(2)　$f(x)$ の最大値が 4 以上のとき, a の値の範囲を求めよ。

3

解答解説のページへ

正六角形 ABCDEF の頂点 A, B, C の座標をそれぞれ$(2,\ 3)$, $(1,\ 2)$, $(a,\ b)$とする。ただし, $a>0$ とする。

(1) a, b の値を求めよ。

(2) 対角線 AD, CF の交点の座標を求めよ。

4

解答解説のページへ

三角形 ABC において，$AB=2$，$AC=1$ とする。$\angle A$ の二等分線が辺 BC と交わる点を P とし，$\angle PAC=\theta$ とする。

(1) 三角形 ABC の面積を θ を用いて表せ。

(2) AP を θ を用いて表せ。

(3) $AP=BP$ のとき，θ の値を求めよ。

5

解答解説のページへ

大小 2 個のさいころを同時に投げる試行において, 出た目の数の和が 3 の倍数のときには A が 3 点, B が 0 点を得るとし, 3 の倍数でないときには A が 0 点, B が 1 点を得るとする。

(1)　この試行を 1 回行うとき, A の得点の期待値と B の得点の期待値を求めよ。

(2)　この試行を n 回行うとき, A の合計得点と B の合計得点が等しくなる確率を, 1 から 10 までの自然数 n のそれぞれについて求めよ。

$\boxed{1}$

問題のページへ

(1)　y 軸との交点が $(0,\ k)$ より，$y = ax^2 + bx + k\ (a \neq 0)$ とおける。

点 $(1,\ 1)$ を通るので，$a + b + k = 1$ ………①

点 $(-1,\ 5)$ を通るので，$a - b + k = 5$ ………②

①②より，$b = -2$ ……③，$a + k = 3$ ……④

③より，$y = ax^2 - 2x + k = a\left(x - \dfrac{1}{a}\right)^2 - \dfrac{1}{a} + k$

頂点が $(p,\ q)$ より，④を代入して，

$$p = \frac{1}{a} = \frac{1}{3-k},\ q = -\frac{1}{a} + k = -\frac{1}{3-k} + k = \frac{-k^2 + 3k - 1}{3-k}$$

(2)　条件より，$\dfrac{1}{3-k} > 0$ ……⑤，$\dfrac{-k^2 + 3k - 1}{3-k} > 0$ ……⑥

⑤より，$3 - k > 0,\ k < 3$ ………⑦

⑥に代入すると，$-k^2 + 3k - 1 > 0$，$k^2 - 3k + 1 < 0$

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} < k < \frac{3+\sqrt{5}}{2} \text{ ………⑧}$$

⑦⑧より，$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} < k < \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

［解 説］

数Ⅰの教科書に載っている例題のような問題です。確実にゲットすることが必要です。

2

問題のページへ

(1)　$f(x)=\log_2(a+x)+\log_4(a-x)$ より，$a+x>0$，$a-x>0$ なので，$-a<x<a$

$$f(x)=\log_2(a+x)+\frac{\log_2(a-x)}{2}=\frac{1}{2}\log_2(a+x)^2(a-x)$$

ここで，$g(x)=(a+x)^2(a-x)=-(x+a)^2(x-a)$ とおくと，

$$g'(x)=-2(x+a)(x-a)-(x+a)^2$$
$$=-(x+a)(3x-a)$$

x	$-a$	$\cdots$	$\frac{a}{3}$	$\cdots$	a
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

右表より $x=\dfrac{a}{3}$ のとき，$g(x)$ は最大値をとり，このとき $f(x)$ も最大となる。

(2)　$f\left(\dfrac{a}{3}\right)=\dfrac{1}{2}\log_2\dfrac{2}{3}a\left(\dfrac{4}{3}a\right)^2=\dfrac{1}{2}\log_2\dfrac{2^5}{3^3}a^3$

条件より，$\dfrac{1}{2}\log_2\dfrac{2^5}{3^3}a^3\geqq 4$，$\dfrac{2^5}{3^3}a^3\geqq 2^8$，$a^3\geqq 2^3\cdot 3^3$

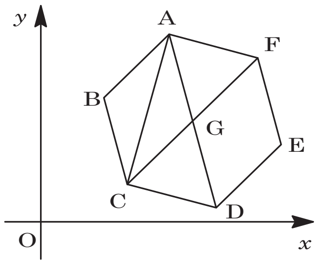
よって，$a\geqq 6$

［解　説］

前問は数Ⅰでしたが，本問は数Ⅱの教科書レベルの問題です。計算ミスが致命的となる基本問題です。

$\boxed{3}$

問題のページへ



(1)　$AB=\sqrt{(2-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{2}$ より，$BC=\sqrt{2}$

$BC^2=(a-1)^2+(b-2)^2=2$ ………①

また，$AC=2\cdot AB\sin 60^\circ=\sqrt{6}$ より，

$AC^2=(a-2)^2+(b-3)^2=6$ ………②

①－②より，$a+b=2$ ………③

①③より，$(a-1)^2+a^2=2$，$2a^2-2a-1=0$

$a>0$ なので，$a=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

③から，$b=2-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$

(2)　対角線 AD, CF の交点を G とすると，四角形 ABCG はひし形となるので，

$$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{BA}=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2},\ \frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)+(1,\ 1)=\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2},\ \frac{5-\sqrt{3}}{2}\right)$$

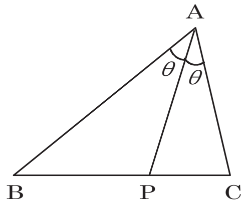
よって，$G\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{5-\sqrt{3}}{2}\right)$

［解　説］

(1)では複素数を用いる解法も考えられます。しかし，広大の文系は数 B の複素数は範囲外ですので, 2 点間の距離で計算しました。

$\boxed{4}$

問題のページへ



(1)　$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 1\cdot \sin 2\theta=\sin 2\theta$

(2)　$AP=x$ とおくと,

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot x\cdot \sin\theta+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot x\cdot \sin\theta=\frac{3}{2}x\sin\theta$$

(1)より，$\sin 2\theta=\dfrac{3}{2}x\sin\theta$

$$x=\frac{2\sin 2\theta}{3\sin\theta}=\frac{4\sin\theta\cos\theta}{3\sin\theta}=\frac{4}{3}\cos\theta$$

(3)　$AP=BP$ より，$BP=\dfrac{4}{3}\cos\theta$

また，$BP:PC=AB:AC=2:1$ より，$BC=\dfrac{3}{2}BP=2\cos\theta$

$\triangle ABC$ に余弦定理を適用して，$4\cos^2\theta=4+1-2\cdot 2\cdot 1\cdot \cos 2\theta$

$$4\cos^2\theta=5-4(2\cos^2\theta-1)，\cos^2\theta=\frac{3}{4}$$

$0°<\theta<90°$ より，$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって，$\theta=30°$

［解 説］

非常によくある構図の頻出問題です。類題の経験がないという受験生の方が珍しいくらいでしょう。

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1)　出た目の数の和が 3 の倍数となるのは次の場合である。

(i)　3 の倍数どうしの和のとき

$(3,\ 6)$ の中から 2 つで，$2\times 2=4$ 通り。

(ii)　3 で割った余りが 1 の数と 2 の数の和のとき

$(1,\ 4)$ の中から 1 つ，$(2,\ 5)$ の中から 1 つで，$4\times 2=8$ 通り。

(i)(ii)より，和が 3 の倍数となるのは $4+8=12$ 通りで，その確率は $\dfrac{12}{6^2}=\dfrac{1}{3}$ となる。

また，和が 3 の倍数とならない確率は，$1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$ である。

A の得点の期待値は，$0\times\dfrac{2}{3}+3\times\dfrac{1}{3}=1$

B の得点の期待値は，$0\times\dfrac{1}{3}+1\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}$

(2)　A の得点は 3 点ずつ, B の得点は 1 点ずつ増えていくので, 10 回までの試行で, A と B の合計得点が等しくなるのは, 3 点と 6 点の場合だけである。

合計得点が 3 点で等しくなるのは, 4 回の試行で 3 の倍数が 1 回, 3 の倍数以外が 3 回のときである。また 6 点で等しくなるのは，8 回の試行で 3 の倍数が 2 回，3 の倍数以外が 6 回のときである。

以上より，A の合計得点と B の合計得点が等しくなる確率を P とすると，$n=4$ のとき $P={}_4\mathrm{C}_1\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{32}{81}$，$n=8$ のとき $P={}_8\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^6=\dfrac{1792}{6561}$，$n\neq 4$ かつ $n\neq 8$ のとき $P=0$ となる。

［解 説］

(2)の「1 から 10 までの自然数 n のそれぞれについて求めよ」という設問を読むと，一瞬，ものすごい解答量が必要という感じがしました。しかし，それは杞憂に過ぎませんでした。