$\boxed{1}$

解答解説のページへ

$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ とする。

(1)　$X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ に対して，$AX=XA$ が成り立つとき，$a,\ b,\ c,\ d$ の満たす関係式を求めよ。

(2)　2 次の正方行列 $B,\ C$ が，$AB=BA=C$，$BC=CB=A$ を満たすとき，$B,\ C$ を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

$0<a<1$ とする。点$(1,\ 0)$から楕円$\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1$に引いた接線の接点の x 座標を b とする。

(1) b を a で表せ。

(2) 楕円$\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1$の $b\leqq x\leqq a$ の部分と直線$x=b$で囲まれた図形を，x 軸のまわりに１回転してできる立体の体積 Vを a で表せ。

(3) Vの値が最大となる a の値と，そのときの Vの最大値を求めよ。

3

解答解説のページへ

$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}$を満たす二等辺三角形 OAB において，頂点 A，B からそれぞれの対辺またはその延長上に引いた 2 つの垂線の交点を G，辺 AB の中点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$とおく。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=s\vec{a}+t\vec{b}$を満たす $s,\ t$ をθを用いて表せ。

(2) 点 G が三角形 OAB の外部または周上にあるときのθの値の範囲を求めよ。

(3) $\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{2}{3}\pi$のとき，$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{GH}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|}$の値の範囲を求めよ。

4

解答解説のページへ

k を定数とする。曲線 $y=x^3-kx$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ a^3-ka)$ における接線 l が，曲線上の P と異なる点 $\mathrm{Q}(b,\ b^3-kb)$ を通るものとする。

(1)　b を a で表せ。

(2)　Q における曲線 $y=x^3-kx$ の接線が l と直交するとき，k，a の満たす関係式を求めよ。

(3)　(2)で求めた関係式を満たす a が存在するような k の値の範囲を求めよ。

5

解答解説のページへ

n が自然数のとき，次の不等式を証明せよ。ただし，$a>0$ とする。

(1)　$(a+1)^n \geqq a^n + na^{n-1}$

(2)　$(n+1)^n \geqq 2n^n$

(3)　$n! \leqq 2\left(\dfrac{n}{2}\right)^n$

6

解答解説のページへ

1 から n までの自然数を 1 つずつ書いた n 枚のカードがある。よくまぜて 1 枚引いては戻すということを 2 回行い，1 回目に引いたカードに書かれている数と 2 回目に引いたカードに書かれている数の差の絶対値を得点とする試行を考える。

(1)　この試行を 1 回行うときの得点の期待値を n の式で表せ。

(2)　$n = 3$ とする。この試行を 3 回行うとき，得点の合計が 2 である確率を求めよ。

$\boxed{1}$

問題のページへ

(1)　$AX=XA$ より，$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

よって，$c=b$，$d=a$

(2)　条件より，$AB=BA=C$ ……①，$BC=CB=A$ ……②

まず，①より $BC=BAB$，$CB=BAB$ となり，②の $BC=CB$ は成立する。

また，①の $AB=BA$ と(1)の結果から，$B=\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}$ とおける。

このとき，①から $C=AB=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b&a\\a&b\end{pmatrix}$

さらに，②から $BC=A$ なので，$\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b&a\\a&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

$ab=0$ ……③，$a^2+b^2=1$ ……④

③④より，$(a,\ b)=(0,\ \pm1)$，$(\pm1,\ 0)$

以上より，複号同順として，$B=\begin{pmatrix}0&\pm1\\\pm1&0\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}\pm1&0\\0&\pm1\end{pmatrix}$ または

$B=\begin{pmatrix}\pm1&0\\0&\pm1\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}0&\pm1\\\pm1&0\end{pmatrix}$ となる。

［解 説］

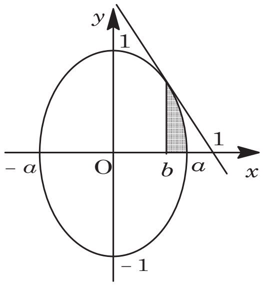
(2)では，成分を用いて普通に計算をしました。①と②には 4 つの等式が入っていますが，これを①の第 1 式，②の第 1 式，①の第 2 式，②の第 2 式という順で一つずつ考えていきました。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　接点を$(b,\ c)$とするとき，接線は$\dfrac{b}{a^2}x+cy=1$

点$(1,\ 0)$を通ることより，$\dfrac{b}{a^2}=1$から，$b=a^2$



(2)　楕円$\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1$はx軸対称なので，右図の網点部をx軸のまわりに1回転してできる立体の体積がVとなる。

ここで，$y^2=1-\dfrac{x^2}{a^2}$から，

$$V=\int_{a^2}^{a}\pi\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi\left[\,x-\frac{x^3}{3a^2}\,\right]_{a^2}^{a}$$

$$=\frac{\pi}{3}(a^4-3a^2+2a)$$

(3)　$f(a)=a^4-3a^2+2a$とおくと，

$$f'(a)=4a^3-6a+2$$
$$=2(a-1)(2a^2+2a-1)$$

$f'(a)=0$の解は，$a=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$

a	0	$\cdots$	$\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	1
$f'(a)$		＋	0	−	
$f(a)$		↗		↘	

右表より，$a=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$のとき，$f(a)$は最大となる。

ここで，$f(a)=(2a^2+2a-1)\left(\dfrac{1}{2}a^2-\dfrac{1}{2}a-\dfrac{3}{4}\right)+3a-\dfrac{3}{4}$より，

$$f\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)=3\cdot\frac{-1+\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}=\frac{-9+6\sqrt{3}}{4}$$

よって, Vは最大値$\dfrac{\pi}{3}\cdot f\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{-3+2\sqrt{3}}{4}\pi$をとる。

［解　説］

(3)の極大値を求める計算がポイントとなります。ここでは，整式の除法に関する等式を用いました。これは複雑な数値計算を回避する必修技法の一つです。

3

問題のページへ

(1)　$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OA}=(s-1)\vec{a}+t\vec{b}$，$\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OB}=s\vec{a}+(t-1)\vec{b}$

$\overrightarrow{AG}\cdot\vec{b}=0$ より，$(s-1)\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2=0$

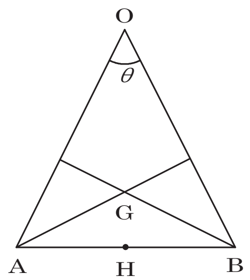
$$s\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2=\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|$ より，$s\cos\theta+t=\cos\theta$ ………①

$\overrightarrow{BG}\cdot\vec{a}=0$ より，$s|\vec{a}|^2+(t-1)\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$$s|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|$ より，$s+t\cos\theta=\cos\theta$ ………②



①②より，$\cos\theta\neq\pm1$ なので，$s=t=\dfrac{\cos\theta}{\cos\theta+1}$

(2)　点 G が三角形 OAB の外部または周上にある条件は，$s\leqq0$ または $t\leqq0$ または $s+t\geqq1$ である。

(1)から，$\dfrac{\cos\theta}{\cos\theta+1}\leqq0$ ……③，または $\dfrac{2\cos\theta}{\cos\theta+1}\geqq1$ ……④

③より $\cos\theta\leqq0$ となり，$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta<\pi$

④より $2\cos\theta\geqq\cos\theta+1$ となり，$\cos\theta\geqq1$ から不成立。

以上より，$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta<\pi$

(3)　$\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})-\dfrac{\cos\theta}{\cos\theta+1}(\vec{a}+\vec{b})=\dfrac{1-\cos\theta}{2(\cos\theta+1)}(\vec{a}+\vec{b})$ より，

$$|\overrightarrow{GH}|=\left|\frac{1-\cos\theta}{2(\cos\theta+1)}\right||\vec{a}+\vec{b}|,\ |\overrightarrow{OH}|=\frac{1}{2}|\vec{a}+\vec{b}|$$

よって，$\dfrac{|\overrightarrow{GH}|}{|\overrightarrow{OH}|}=\left|\dfrac{1-\cos\theta}{\cos\theta+1}\right|=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=-1+\dfrac{2}{1+\cos\theta}$

ここで $\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ より，$-\dfrac{1}{2}\leqq\cos\theta\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ なので，$\dfrac{1}{2}\leqq1+\cos\theta\leqq\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$

$$7-4\sqrt{3}\leqq-1+\frac{2}{1+\cos\theta}\leqq3$$

以上より，$7-4\sqrt{3}\leqq\dfrac{|\overrightarrow{GH}|}{|\overrightarrow{OH}|}\leqq3$

［解　説］

(3)では(2)の結果を用いて，点 G が△OAB の内部にあるときと外部または周上にあるときに場合分けをしてもよいのですが，解が長くなるだけです。もっとも，最初はそうしたのですが。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　接線$l: y = mx + n$とおくと，条件より，

$$x^3 - kx - (mx + n) = (x - a)^2(x - b)$$

x^2の係数を比べて，$0 = -b - 2a$，$b = -2a$

なお$b \neq a$より，$a \neq 0$

(2)　$y = x^3 - kx$より，$y' = 3x^2 - k$

$x = a$のとき$y' = 3a^2 - k$，また$x = b = -2a$のとき$y' = 12a^2 - k$

条件より，$(3a^2 - k)(12a^2 - k) = -1$

$$36a^4 - 15ka^2 + k^2 + 1 = 0 \cdots\cdots\cdots ①$$

(3)　①において，$a^2 = t$とおくと，$t > 0$で，

$$36t^2 - 15kt + k^2 + 1 = 0 \cdots\cdots\cdots ②$$

①を満たす a が存在する条件は，②の解の少なくとも 1 つが $t > 0$ であることに等しい。

ここで，$y = 36t^2 - 15kt + k^2 + 1$のグラフの軸は$t = \dfrac{5}{24}k$であり，$y$ 軸との交点は$y = k^2 + 1 > 0$から，求める条件は，②の判別式$D \geqq 0$かつ軸$t = \dfrac{5}{24}k$が正である。

$$D = (15k)^2 - 4\cdot 36(k^2 + 1) \geqq 0 \cdots\cdots ③,\quad \frac{5}{24}k > 0 \cdots\cdots ④$$

④より $k > 0$，③より $9k^2 - 16 \geqq 0$

よって，$k \geqq \dfrac{4}{3}$

［解 説］

本問はいかにも文系風ですが，文理共通問題ではなく，理系で単独に出題されたものです。

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1)　二項定理より, $a>0$ なので,

$$(a+1)^n \geqq a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1} = a^n + na^{n-1} \cdots\cdots\cdots ①$$

(2)　①において，$a=n$ とおくと,

$$(n+1)^n \geqq n^n + n\cdot n^{n-1} = 2n^n \cdots\cdots\cdots ②$$

(3)　$n!\leqq 2\left(\dfrac{n}{2}\right)^n$ ……③が成立することを数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=1$ のとき

③の左辺$=1!=1$，③の右辺$=2\cdot\dfrac{1}{2}=1$ となり，$n=1$ のとき③は成り立つ。

(ii)　$n=k$ のとき

$k!\leqq 2\left(\dfrac{k}{2}\right)^k$ ……④が成り立つと仮定する。

④の両辺に $(k+1)$ をかけて

$$(k+1)!\leqq 2(k+1)\left(\frac{k}{2}\right)^k = \frac{2(k+1)}{2^k}\cdot k^k$$

②より，$\dfrac{2(k+1)}{2^k}\cdot k^k \leqq \dfrac{2(k+1)}{2^k}\cdot\dfrac{(k+1)^k}{2} = 2\left(\dfrac{k+1}{2}\right)^{k+1}$

よって，$(k+1)!\leqq 2\left(\dfrac{k+1}{2}\right)^{k+1}$ となり，$n=k+1$ のときも成り立つ。

(i)(ii)より，自然数 n に対して，③が成り立つ。

［解 説］

②式は，誘導を細かくするために後から入れたような不等式です。それとも，いきなり②式では難しいので，①式を②式の誘導として追加したのでしょうか。

6

問題のページへ

(1)　得点を X とすると，$0 \leqq X \leqq n-1$ となる。

　まず，$1 \leqq k \leqq n-1$ のとき $X=k$ となるのは，2 つの数の差の絶対値が k なので，$(1,\ k+1)$，$(2,\ k+2)$，……，$(n-k,\ n)$ の場合である。このとき，引く順序を考えると $2(n-k)$ 通りある。

　$X=k$ となる確率を P_k とすると，$P_k = \dfrac{2(n-k)}{n^2}$ （$1 \leqq k \leqq n-1$）

　また，$X=0$ となるのは，$(1,\ 1)$，$(2,\ 2)$，……，$(n,\ n)$ の場合で，その確率を P_0 とすると，$P_0 = \dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n}$

　題意の試行を 1 回行うときの得点の期待値 $E(X)$ は，

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n-1} kP_k = \sum_{k=1}^{n-1} kP_k = \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)$$
$$= \frac{2}{n^2}\left\{n \cdot \frac{1}{2}(n-1)n - \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)\right\}$$
$$= \frac{(n-1)(n+1)}{3n}$$

(2)　$n=3$ のとき，題意の試行を 1 回行うときの確率は，(1) より，

得点	0	1	2
確率	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$

$$P_0 = \frac{3}{9},\quad P_1 = \frac{2(3-1)}{3^2} = \frac{4}{9},\quad P_2 = \frac{2(3-2)}{3^2} = \frac{2}{9}$$

　3 回の試行の後，得点の合計が 2 となるのは，得点が $(0,\ 0,\ 2)$，$(0,\ 1,\ 1)$ の場合であり，その確率は試行の順序を考えて，

$${}_3C_2\left(\frac{3}{9}\right)^2\frac{2}{9} + {}_3C_1\frac{3}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{3\cdot 3^2\cdot 2 + 3\cdot 3\cdot 4^2}{9^3} = \frac{22}{81}$$

［解 説］

確率と期待値に関する頻出問題です。毎年，題意が同じ問題に出会っているような気がします。