$\boxed{1}$ 解答解説のページへ

$a,\ b,\ c,\ d$ を正の整数とする。複素数 $w = a + bi$， $z = c + di$ が $w^2 z = 1 + 18i$ を満たす。$a,\ b,\ c,\ d$ を求めよ。

2

解答解説のページへ

三角形 ABC において，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|=1$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k$ である。辺 AB 上に $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を満たす点 D をとる。辺 AC 上に $\left|\overrightarrow{\mathrm{DP}}\right|=\dfrac{1}{3}\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|$ を満たす点 P が 2 つ存在するための k の条件を求めよ。ただし，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{DP}}\right|$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|$ はベクトルの長さを表し，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ はベクトルの内積を表す。

3

解答解説のページへ

三角すい ABCD において辺 CD は底面 ABC に垂直である。$\mathrm{AB}=3$ で, 辺 AB 上の 2 点 E, F は, $\mathrm{AE}=\mathrm{EF}=\mathrm{FB}=1$ を満たし, $\angle\mathrm{DAC}=30^\circ$, $\angle\mathrm{DEC}=45^\circ$, $\angle\mathrm{DBC}=60^\circ$ である。

(1) 辺 CD の長さを求めよ。

(2) $\theta=\angle\mathrm{DFC}$ とおくとき, $\cos\theta$ を求めよ。

4

解答解説のページへ

c を正の定数とし，$f(x)=x^3+3x^2$，$g(x)=x^3+3x^2+c$ とする。直線 l は点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ で曲線 $y=f(x)$ と接し，点 $\mathrm{Q}(q,\ g(q))$ で曲線 $y=g(x)$ と接する。

(1) c を p で表せ。

(2) 直線 l と曲線 $y=f(x)$ の P 以外の交点を R とする。2 つの線分の長さの比 $\mathrm{PQ}:\mathrm{QR}$ を求めよ。

5

解答解説のページへ

1 個のサイコロを n 回投げる。

(1) $n \geqq 2$ のとき，1 の目が少なくとも 1 回出て，かつ 2 の目も少なくとも 1 回出る確率を求めよ。

(2) $n \geqq 3$ のとき，1 の目が少なくとも 2 回出て，かつ 2 の目が少なくとも 1 回出る確率を求めよ。

$\boxed{1}$ 問題のページへ

$w^2z=(a+bi)^2(c+di)=(a^2-b^2)c-2abd+\{(a^2-b^2)d+2abc\}i$ なので，条件

$w^2z=1+18i$ ……①に代入して，

$$(a^2-b^2)c-2abd=1 \text{ ………②},\ (a^2-b^2)d+2abc=18 \text{ ………③}$$

$a\geqq1,\ b\geqq1,\ c\geqq1,\ d\geqq1$ なので，②より，$(a^2-b^2)c=2abd+1>0$

よって，$a^2>b^2$，すなわち $a>b$ ………④

ここで，①より，$|w^2z|=\sqrt{1^2+18^2}=\sqrt{325}$

$$|w|^2|z|=\sqrt{325},\ |w|^2=\frac{\sqrt{325}}{|z|} \text{ ………⑤}$$

さて，$|z|=\sqrt{c^2+d^2}\geqq\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ から，⑤と合わせて，

$$a^2+b^2=|w|^2\leqq\frac{\sqrt{325}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{325}{2}}<\sqrt{169}=13$$

$a,\ b$ は正の整数なので，④から $(a,\ b)=(2,\ 1),\ (3,\ 1)$

(i)　$(a,\ b)=(2,\ 1)$ のとき

②より $3c-4d=1$ ……⑥，③より $3d+4c=18$ ……⑦

⑥⑦から，$c=3,\ d=2$

(ii)　$(a,\ b)=(3,\ 1)$ のとき

②より $8c-6d=1$ ……⑧，③より $8d+6c=18$ ……⑨

⑧⑨より $c=\dfrac{29}{25}$ となり，c が整数という条件に反する。

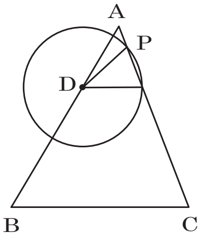
(i)(ii)より，$(a,\ b,\ c,\ d)=(2,\ 1,\ 3,\ 2)$

［解 説］

一橋大恒例の整数問題です。いろいろな解法が考えられますが，上の解では，絶対値に注目をして，$a,\ b,\ c,\ d$ の範囲を絞り込みました。

2

問題のページへ



$\mathrm{AB}=a$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k$ より，

$$a\cdot 1\cdot\cos A=k,\ \ k=a\cos A \cdots\cdots\cdots ①$$

△ABC に余弦定理を適用すると，①より，

$$\mathrm{BC}^2=a^2+1^2-2a\cdot 1\cdot\cos A=a^2+1-2k \cdots\cdots\cdots ②$$

次に，$\mathrm{AP}=x$ とおき，△ADP に余弦定理を適用すると，$\mathrm{DP}=\frac{1}{3}\mathrm{BC}$，$\mathrm{AD}=\frac{1}{3}a$ より，

$$\left(\frac{1}{3}\mathrm{BC}\right)^2=\left(\frac{1}{3}a\right)^2+x^2-2\cdot\frac{1}{3}a\cdot x\cdot\cos A$$

①②より，$\frac{1}{9}(a^2+1-2k)=\frac{1}{9}a^2+x^2-\frac{2}{3}kx$

$$9x^2-6kx+2k-1=0,\ \ (3x-1)(3x-2k+1)=0$$

よって，$x=\frac{1}{3}$，$x=\frac{2k-1}{3}$

P が AC 上に 2 つ存在する条件は，$0\leqq\frac{2k-1}{3}\leqq 1$ かつ $\frac{2k-1}{3}\neq\frac{1}{3}$

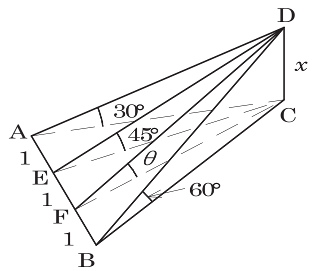
すなわち，$\frac{1}{2}\leqq k\leqq 2$ かつ $k\neq 1$ より，$\frac{1}{2}\leqq k<1$，$1<k\leqq 2$

［解 説］

$\mathrm{AP}=x$ とおき，x についての 2 次方程式が $0\leqq x\leqq 1$ に異なる 2 解をもつ条件を求める問題です。しかし，いわゆる解の配置の常套手段で解くのではなく，$x=\frac{1}{3}$ が 1 つの解であることを読み取り，これを利用することがポイントです。

3

問題のページへ



(1)　CD $= x$ とおくと，$\angle\text{ADC} = 60^\circ$，$\angle\text{EDC} = 45^\circ$，$\angle\text{BDC} = 30^\circ$ より，

$$\text{AC} = x\tan 60^\circ = \sqrt{3}x,\quad \text{EC} = x\tan 45^\circ = x$$

$$\text{BC} = x\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}x$$

底面の△ACE に余弦定理を適用して，

$$\cos A = \frac{1+3x^2-x^2}{2\cdot 1\cdot\sqrt{3}x} = \frac{1+2x^2}{2\sqrt{3}x}\cdots\cdots\cdots①$$

底面の△ACB に余弦定理を適用して，

$$\cos A = \frac{9+3x^2-\frac{1}{3}x^2}{2\cdot 3\cdot\sqrt{3}x} = \frac{27+8x^2}{18\sqrt{3}x}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\dfrac{1+2x^2}{2\sqrt{3}x} = \dfrac{27+8x^2}{18\sqrt{3}x}$，$9+18x^2 = 27+8x^2$，$10x^2 = 18$

よって，$x^2 = \dfrac{9}{5}$ から，$\text{CD} = x = \sqrt{\dfrac{9}{5}} = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$

(2)　①より，$\cos A = \dfrac{1+2\cdot\frac{9}{5}}{2\sqrt{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{5}}} = \dfrac{23}{6\sqrt{15}}$

底面の△ACF に余弦定理を適用して，$\text{AC} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ より，

$$\text{CF}^2 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)^2 + 2^2 - 2\cdot\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\cdot 2\cdot\frac{23}{6\sqrt{15}} = \frac{1}{5}$$

よって，$\text{CF} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ となり，$\tan\theta = \dfrac{\text{CD}}{\text{CF}} = 3$ となる。

したがって，$\dfrac{1}{\cos^2\theta} = 1+\tan^2\theta = 10$ で $\cos\theta > 0$ より，$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ である。

［解 説］

測量との関連から，教科書の章末問題あたりで類題をよく見かけるものです。底面の三角形に注目して三角比の定理を適用していきます。

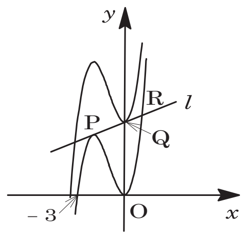
4

問題のページへ

(1)　$f(x)=x^3+3x^2$，$g(x)=x^3+3x^2+c$ より，$f'(x)=g'(x)=3x^2+6x$

点 P における接線は,

$$y=(3p^2+6p)(x-p)+p^3+3p^2$$
$$=(3p^2+6p)x-2p^3-3p^2 \cdots\cdots\cdots ①$$



点 Q における接線は,

$$y=(3q^2+6q)(x-q)+q^3+3q^2+c$$
$$=(3q^2+6q)x-2q^3-3q^2+c \cdots\cdots\cdots ②$$

①と②が一致することより,

$$3p^2+6p=3q^2+6q \cdots\cdots ③,\ -2p^3-3p^2=-2q^3-3q^2+c \cdots\cdots ④$$

③より，$p^2-q^2+2(p-q)=0$，$(p-q)(p+q+2)=0$

$p=q$ とすると, ④より $c=0$ となり, $c>0$ に反する。

よって，$p+q+2=0$，$q=-p-2 \cdots\cdots\cdots ⑤$

④⑤より，$c=2q^3+3q^2-2p^3-3p^2=2(-p-2)^3+3(-p-2)^2-2p^3-3p^2$

$$=-4p^3-12p^2-12p-4=-4(p+1)^3 \cdots\cdots\cdots ⑥$$

(2)　$y=f(x)$ と①を連立すると，$x^3+3x^2=(3p^2+6p)x-2p^3-3p^2$

$$x^3+3x^2-(3p^2+6p)x+2p^3+3p^2=0,\ (x-p)^2(x+2p+3)=0$$

$x\neq p$ より, 点 R の x 座標は，$x=-2p-3$

ここで, ⑥より $c>0$ なので，$p<-1$ となり，$p<-p-2<-2p-3$

以上より，$\mathrm{PQ}:\mathrm{QR}=(-p-2-p):(-2p-3+p+2)$

$$=(-2p-2):(-p-1)=2:1$$

［解 説］

２つの３次曲線の共通接線を題材にした頻出題です。正確な計算がすべてです。

5　　問題のページへ

(1)　1の目が少なくとも1回出る事象をA，2の目が少なくとも1回出る事象をBとすると，$\overline{A}$は1の目が1回も出ない事象，$\overline{B}$は2の目が1回も出ない事象，$\overline{A}\cap\overline{B}$は1と2の目がともに1回も出ない事象を表す。

$$P(\overline{A})=P(\overline{B})=\left(\frac{5}{6}\right)^n,\ P(\overline{A}\cap\overline{B})=\left(\frac{4}{6}\right)^n=\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

1の目が少なくとも1回出て，かつ2の目も少なくとも1回出る事象は$A\cap B$となるので，求める確率は，

$$\begin{aligned}P(A\cap B)&=1-P(\overline{A\cap B})=1-P(\overline{A}\cup\overline{B})\\&=1-\left\{P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A}\cap\overline{B})\right\}\\&=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n=1-2\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n\end{aligned}$$

(2)　1の目が少なくとも2回出る事象をCとすると，$\overline{C}$は1の目が1回も出ないかまたは1回だけ出る事象を表す。

$$P(\overline{C})=\left(\frac{5}{6}\right)^n+{}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}=\left(\frac{5}{6}\right)^n+\frac{n}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}=\left(1+\frac{n}{5}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

また，$\overline{C}\cap\overline{B}$は2の目が1回も出なくて，1の目が1回も出ないかまたは1回だけ出る事象を表す。

$$P(\overline{C}\cap\overline{B})=\left(\frac{2}{3}\right)^n+{}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{n}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\left(1+\frac{n}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

1の目が少なくとも2回出て，かつ2の目が少なくとも1回出る事象は$C\cap B$となるので, (1)と同様にして，求める確率は,

$$\begin{aligned}P(C\cap B)&=1-\left\{P(\overline{C})+P(\overline{B})-P(\overline{C}\cap\overline{B})\right\}\\&=1-\left(1+\frac{n}{5}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(1+\frac{n}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n\\&=1-\left(2+\frac{n}{5}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(1+\frac{n}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n\end{aligned}$$

［解 説］

(1)は余事象を考えて，関係$P(A\cap B)=1-\left\{P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A}\cap\overline{B})\right\}$を利用する頻出題です。(2)もまた, (1)とは独立に，この関係を用いました。(1)を誘導として設けた出題者の善意を無視してしまいましたが……。