1

解答解説のページへ

a, b を整数とする。3 次方程式 $x^3+ax^2+bx-1=0$ は 3 実数解 α, β, γ をもち, $0<\alpha<\beta<\gamma<3$ で, α, β, γ のうちどれかは整数である。a, b を求めよ。

2

解答解説のページへ

放物線 $y = x^2$ 上に，直線 $y = ax + 1$ に関して対称な位置にある異なる 2 点 P, Q が存在するような a の範囲を求めよ。

3

解答解説のページへ

四面体 OAPQ において，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ で，$\angle\mathrm{PAQ}=30^\circ$ である。

(1) $\triangle\mathrm{APQ}$ の面積 S を求めよ。

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ のとりうる範囲を求めよ。

(3) 四面体 OAPQ の体積 V の最大値を求めよ。

4

解答解説のページへ

複素数$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$は，条件$\dfrac{\sqrt{2}}{4}\leqq r\leqq\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，$0°\leqq\theta\leqq 90°$を満たす。

(1)　$f(z)=|z+z^2|$の最大値と最小値，およびそれらを与える複素数zを求めよ。

(2)　$g(z)=|2z+z^3|$の最大値と最小値，およびそれらを与える複素数zを求めよ。

5

解答解説のページへ

1 から n までの数字を 1 つずつ書いた n 枚のカードがある。ただし, $n \geqq 2$ とする。

(1)　この n 枚のカードから一度に 2 枚選び, 大きい方の数字を X とする。X の期待値 E_1 を求めよ。

(2)　この n 枚のカードから 1 枚選び, その数字を X_1 とする。そのカードをもとに戻し, 改めて 1 枚選び, その数字を X_2 とする。X_1 と X_2 の小さくない方の数字を Y とする。Y の期待値 E_2 を求めよ。

1

問題のページへ

$x^3+ax^2+bx-1=0$ ……①に対して,

(i)　$x=1$を解にもつとき

$1+a+b-1=0$ より $b=-a$ となるので, ①は $x^3+ax^2-ax-1=0$

$$(x-1)\{x^2+(a+1)x+1\}=0$$

$$x=1,\ x^2+(a+1)x+1=0\ \cdots\cdots\cdots ②$$

②の解が $x\neq 1$ で, ともに $0<x<3$ にある条件は,

$f(x)=x^2+(a+1)x+1=\left(x+\dfrac{a+1}{2}\right)^2-\dfrac{(a+1)^2}{4}+1$ とすると,

$$0<-\frac{a+1}{2}<3\ \cdots\cdots\cdots ③,\quad -\frac{(a+1)^2}{4}+1<0\ \cdots\cdots\cdots ④$$

$$f(3)=9+3(a+1)+1>0\ \cdots\cdots\cdots ⑤,\quad f(1)=1+(a+1)+1\neq 0\ \cdots\cdots\cdots ⑥$$

③より $-7<a<-1$, ④より $a<-3$, $1<a$, ⑤より $a>-\dfrac{13}{3}$, ⑥より $a\neq -3$

以上まとめて, $-\dfrac{13}{3}<a<-3$

a は整数なので $a=-4$ となり, $b=4$ である。

(ii)　$x=2$を解にもつとき

$8+4a+2b-1=0$ より, $b=-2a-\dfrac{7}{2}$ となるが, a, b は整数より適さない。

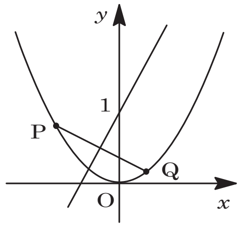
(i)(ii)より, $a=-4$, $b=4$

[解 説]

整数問題が定番だった第 1 問ですが, 今年は, 実質的には 2 次方程式の解の配置の問題です。

2

問題のページへ



$p \neq q$ として，$\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ とおくと，線分 PQ と直線 $y = ax + 1$ が直交することより，

$$\frac{p^2 - q^2}{p - q} \cdot a = -1,\ \ p + q = -\frac{1}{a} \cdots\cdots\cdots ①$$

また，PQ の中点 $\left(\dfrac{p+q}{2},\ \dfrac{p^2+q^2}{2}\right)$ が，直線 $y = ax + 1$ 上にあることより，

$$\frac{p^2 + q^2}{2} = a \cdot \frac{p+q}{2} + 1,\ \ p^2 + q^2 = a(p+q) + 2 \cdots\cdots\cdots ②$$

①を②に代入すると，$p^2 + q^2 = 1 \cdots\cdots\cdots ③$

①③を満たす異なる $p,\ q$ が存在する条件は，直線①と円③が 2 つの共有点を持つ条件に等しいので，

$$\frac{\left|\frac{1}{a}\right|}{\sqrt{1+1}} < 1,\ \ 1 < \sqrt{2}\,|a|$$

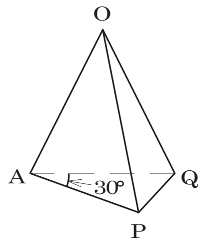
よって，$a < -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{2}} < a$

［解 説］

線対称移動を題材にした問題です。後半の a の範囲を求めるところは，図をイメージしています。

3

問題のページへ



(1)　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = p$, $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = q$ とおくと，条件より，

$$\mathrm{AP} = \sqrt{p^2+1},\ \mathrm{AQ} = \sqrt{q^2+1},\ \mathrm{PQ} = \sqrt{p^2+q^2}$$

ここで，$\triangle\mathrm{APQ}$ に余弦定理を適用して，

$$p^2+q^2 = (p^2+1)+(q^2+1)-2\sqrt{p^2+1}\sqrt{q^2+1}\cos 30^\circ$$

$$\sqrt{p^2+1}\sqrt{q^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdots\cdots\cdots ①$$

①より，$S = \frac{1}{2}\sqrt{p^2+1}\sqrt{q^2+1}\sin 30^\circ = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

(2)　①より，$(p^2+1)(q^2+1) = \frac{4}{3}$，$q^2 = \frac{4}{3(p^2+1)}-1 = \frac{1-3p^2}{3(p^2+1)} \cdots\cdots\cdots ②$

$q>0$ より $q^2>0$ なので，$1-3p^2>0$

$p>0$ と合わせて，$0<p<\frac{1}{\sqrt{3}} \cdots\cdots\cdots ③$

(3)　$V = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot p\right)\cdot q = \frac{1}{6}pq$ となるので，

②より，$p^2q^2 = \frac{p^2-3p^4}{3(p^2+1)} = -p^2+\frac{4}{3}+\frac{-4}{3p^2+3} = -\left(p^2+1+\frac{4}{3p^2+3}\right)+\frac{7}{3}$

ここで，相加平均と相乗平均の関係から，

$$p^2+1+\frac{4}{3p^2+3} \geqq 2\sqrt{(p^2+1)\cdot\frac{4}{3p^2+3}} = 2\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

等号が成立するのは，$p^2+1 = \frac{4}{3p^2+3}$，$(p^2+1)^2 = \frac{4}{3}$，すなわち $p^2 = \frac{2}{\sqrt{3}}-1$ のときであるが，この値は③を満たす。

すると，$p^2q^2 \leqq -\frac{4\sqrt{3}}{3}+\frac{7}{3} = \frac{7-4\sqrt{3}}{3}$ となり，

$$pq \leqq \sqrt{\frac{7-4\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{7-2\sqrt{12}}}{\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}-3}{3}$$

以上より，V の最大値は $\frac{1}{6}\cdot\frac{2\sqrt{3}-3}{3} = \frac{2\sqrt{3}-3}{18}$ である。

［解 説］

最大・最小問題に分数式が絡んでくると，相加平均・相乗平均の出番です。というのも，微分は範囲外ですので。

4

問題のページへ

(1)　$z+z^2=r(\cos\theta+i\sin\theta)+r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$より，

$$f(z)=|z+z^2|=\sqrt{(r\cos\theta+r^2\cos 2\theta)^2+(r\sin\theta+r^2\sin 2\theta)^2}$$
$$=\sqrt{r^2+2r^3(\cos\theta\cos 2\theta+\sin\theta\sin 2\theta)+r^4}=\sqrt{r^2+2r^3\cos\theta+r^4}$$

$0°\leqq\theta\leqq 90°$より，$0\leqq\cos\theta\leqq 1$なので，

$$r^2+r^4\leqq r^2+2r^3\cos\theta+r^4\leqq r^2+2r^3+r^4$$

なお，左側の等号は$\theta=90°$，右側の等号は$\theta=0°$のとき成立する。

$f_1(r)=r^2+2r^3+r^4$とおくと，$\dfrac{\sqrt{2}}{4}\leqq r\leqq\dfrac{\sqrt{5}}{2}$より，$f_1'(r)=2r+6r^2+4r^3>0$

$$f_1(r)\leqq f_1\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{45+20\sqrt{5}}{16}$$

$f_2(r)=r^2+r^4$とおくと，$\dfrac{\sqrt{2}}{4}\leqq r\leqq\dfrac{\sqrt{5}}{2}$より，$f_2'(r)=2r+4r^3>0$

$$f_2(r)\geqq f_2\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{9}{64}$$

以上より，$f(z)$の最大値は$\sqrt{\dfrac{45+20\sqrt{5}}{16}}=\dfrac{\sqrt{45+2\sqrt{500}}}{4}=\dfrac{5+2\sqrt{5}}{4}$となり，このとき$z=\dfrac{\sqrt{5}}{2}(\cos 0°+i\sin 0°)=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$である。また，$f(z)$の最小値は$\sqrt{\dfrac{9}{64}}=\dfrac{3}{8}$となり，このとき$z=\dfrac{\sqrt{2}}{4}(\cos 90°+i\sin 90°)=\dfrac{\sqrt{2}}{4}i$である。

(2)　$2z+z^3=2r(\cos\theta+i\sin\theta)+r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)$より，

$$g(z)=|2z+z^3|=\sqrt{(2r\cos\theta+r^3\cos 3\theta)^2+(2r\sin\theta+r^3\sin 3\theta)^2}$$
$$=\sqrt{4r^2+4r^4(\cos\theta\cos 3\theta+\sin\theta\sin 3\theta)+r^6}=\sqrt{4r^2+4r^4\cos 2\theta+r^6}$$

$0°\leqq\theta\leqq 90°$より，$-1\leqq\cos 2\theta\leqq 1$なので，

$$4r^2-4r^4+r^6\leqq 4r^2+4r^4\cos 2\theta+r^6\leqq 4r^2+4r^4+r^6$$

なお，左側の等号は$\theta=90°$，右側の等号は$\theta=0°$のとき成立する。

$g_1(r)=4r^2+4r^4+r^6$とおくと，$\dfrac{\sqrt{2}}{4}\leqq r\leqq\dfrac{\sqrt{5}}{2}$より$g_1'(r)=8r+16r^3+6r^5>0$

$$g_1(r)\leqq g_1\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{845}{64}$$

$g_2(r)=4r^2-4r^4+r^6$とおくと，$g_2'(r)=8r-16r^3+6r^5=2r(3r^2-2)(r^2-2)$

$g_2'(r)=0$の解は$r=0,\ \pm\sqrt{2},\ \pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$となり，$\dfrac{\sqrt{2}}{4}\leqq r\leqq\dfrac{\sqrt{5}}{2}$において，

$$g_2(r)\geqq g_2\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{225}{512}$$

r	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	…	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	…	$\frac{\sqrt{5}}{2}$
$g_2'(r)$		+	0	−	
$g_2(r)$	$\frac{225}{512}$	↗		↘	$\frac{45}{64}$

以上より，$g(z)$ の最大値は $\sqrt{\dfrac{845}{64}}=\dfrac{13\sqrt{5}}{8}$ $\left(z=\dfrac{\sqrt{5}}{2}(\cos 0^\circ+i\sin 0^\circ)=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$，

$g(z)$ の最小値は $\sqrt{\dfrac{225}{512}}=\dfrac{15\sqrt{2}}{32}$ $\left(z=\dfrac{\sqrt{2}}{4}(\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ)=\dfrac{\sqrt{2}}{4}i\right)$ である。

［解 説］

(1)と(2)で同じような計算を 2 回しなくてはならず，疲れてしまいます。初めは，(1)は(2)の誘導かと思って，いろいろ式変形を試みたのですが。

5

問題のページへ

(1)　n 枚のカードから 2 枚選ぶ場合の数は ${}_n\mathrm{C}_2$ 通りである。

　このとき $X=k$ となるのは，k のカードを 1 枚，$k-1$ 以下のカードから 1 枚選ぶ場合なので，その確率は，

$$\frac{1\times{}_{k-1}\mathrm{C}_1}{{}_n\mathrm{C}_2}=\frac{2(k-1)}{n(n-1)}$$

　よって，$E_1=\displaystyle\sum_{k=2}^{n}k\cdot\frac{2(k-1)}{n(n-1)}=\frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}(k^2-k)$

$$=\frac{2}{n(n-1)}\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)\right\}=\frac{2}{3}(n+1)$$

(2)　$X_1=k$，$X_2\leqq k-1$ の場合の確率は $\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{k-1}{n}$，$X_1\leqq k-1$，$X_2=k$ の場合の確率は $\dfrac{k-1}{n}\cdot\dfrac{1}{n}$，$X_1=X_2=k$ の場合の確率は $\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{n}$ である。

　これより，$Y=k$ となる確率は，

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{k-1}{n}+\frac{k-1}{n}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{2k-1}{n^2}$$

　よって，$E_2=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{2k-1}{n^2}=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(2k^2-k)$

$$=\frac{1}{n^2}\left\{2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)\right\}=\frac{(n+1)(4n-1)}{6n}$$

［解 説］

　確率についての基本を問う問題です。期待値の計算も平易なので，完答が望まれます。