1

解答解説のページへ

$k,\ x,\ y$ は正の整数とする。三角形の 3 辺の長さが $\dfrac{k}{x},\ \dfrac{k}{y},\ \dfrac{1}{xy}$ で，周の長さが $\dfrac{25}{16}$ である。k, x, y を求めよ。

2

解答解説のページへ

$r>0$ とし，$\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とおく。任意の角 θ に対し，複素数平面上で点 $\alpha + \dfrac{1}{\alpha}$ と実軸との距離は 2 以下である。r のとりうる範囲を求めよ。

3

解答解説のページへ

a, b, c は 0 以上の実数とする。3 点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ b)$, $\mathrm{C}(1,\ c)$ は, $\angle\mathrm{ABC} = 30^\circ$, $\angle\mathrm{BAC} = 60^\circ$ を満たす。

(1) c を求めよ。

(2) AB の長さの最大値と最小値を求めよ。

4

解答解説のページへ

頂点が z 軸上にあり，底面が xy 平面上の原点を中心とする円である円錐がある。この円錐の側面が，原点を中心とする半径 1 の球に接している。

(1)　円錐の表面積の最小値を求めよ。

(2)　円錐の体積の最小値を求めよ。

5

解答解説のページへ

最初の試行で 3 枚の硬貨を同時に投げ，裏が出た硬貨を取り除く。次の試行で残った硬貨を同時に投げ，裏が出た硬貨を取り除く。以下この試行をすべての硬貨が取り除かれるまでくり返す。

(1) 試行が 1 回目で終了する確率 p_1，および 2 回目で終了する確率 p_2 を求めよ。

(2) 試行が n 回以上行われる確率 q_n を求めよ。

1　　　　問題のページへ

$k,\ x,\ y$ が正の整数なので，$\dfrac{1}{xy}\leqq\dfrac{k}{x}$，$\dfrac{1}{xy}\leqq\dfrac{k}{y}$ であり，ここで $x\leqq y$ とすると，$\dfrac{1}{xy}\leqq\dfrac{k}{y}\leqq\dfrac{k}{x}$ となり，条件より，

$$\frac{k}{x}+\frac{k}{y}+\frac{1}{xy}=\frac{25}{16}\cdots\cdots①,\quad \frac{k}{x}<\frac{k}{y}+\frac{1}{xy}\cdots\cdots②$$

②より，$ky<1+kx$，$k(y-x)<1\cdots\cdots\cdots③$

$x<y$ とすると，$y-x\geqq 2$ となるが，$k\geqq 1$ なので③は成立しない。したがって，$x=y$ となる。

また, $x\geqq y$ としたときも，同様にして $x=y$ となる。

このとき，①より，$\dfrac{2k}{x}+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{25}{16}$，$32kx+16=25x^2\cdots\cdots\cdots④$

$$x(25x-32k)=16$$

これより, x は 16 の正の約数となり，$x=1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16$

④より，$k=\dfrac{25x^2-16}{32x}=\dfrac{(5x+4)(5x-4)}{32x}$ となり，k が整数になるのは $x=4$ のときだけで，このとき $k=3$ である。

以上より，$(k,\ x,\ y)=(3,\ 4,\ 4)$

［解 説］

$x=y$ であることを発見することがポイントですが，運が悪いとなかなか見つかりません。

2

問題のページへ

$\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ のとき,

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = r(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + i\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta$$

条件より, $\left|\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta\right| \leqq 2$, $\left|r - \frac{1}{r}\right||\sin\theta| \leqq 2$ ………①

①が任意の θ に対して成立する条件は, $0 \leqq |\sin\theta| \leqq 1$ より,

$$\left|r - \frac{1}{r}\right| \leqq 2,\ -2 \leqq r - \frac{1}{r} \leqq 2,\ -2r \leqq r^2 - 1 \leqq 2r$$

$$r^2 + 2r - 1 \geqq 0 \cdots\cdots②,\ r^2 - 2r - 1 \leqq 0 \cdots\cdots③$$

$r > 0$ より, ②から $r \geqq -1 + \sqrt{2}$, ③から $0 < r \leqq 1 + \sqrt{2}$

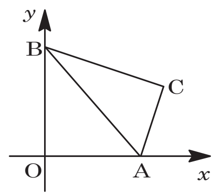
以上より, $-1 + \sqrt{2} \leqq r \leqq 1 + \sqrt{2}$

[解 説]

複素数の理解を問う基本問題です。

3

問題のページへ



(1)　$\angle \mathrm{ACB} = 180° - 30° - 60° = 90°$ より，

$$\frac{\mathrm{AB}}{2} = \mathrm{AC} = \frac{\mathrm{BC}}{\sqrt{3}},\quad \frac{\mathrm{AB}^2}{4} = \mathrm{AC}^2 = \frac{\mathrm{BC}^2}{3}$$

すると，$\dfrac{a^2+b^2}{4} = (a-1)^2 + c^2 = \dfrac{1+(b-c)^2}{3}$

$$a^2 + b^2 = 4\{(a-1)^2 + c^2\} \cdots\cdots ①$$

$$3(a^2+b^2) = 4\{1 + (b-c)^2\} \cdots\cdots ②$$

①より，$3a^2 - b^2 + 4c^2 - 8a + 4 = 0 \cdots\cdots\cdots ③$

②より，$3a^2 - b^2 - 4c^2 + 8bc - 4 = 0 \cdots\cdots\cdots ④$

③－④より，$c^2 - bc - a + 1 = 0$，$a = c^2 - bc + 1 \cdots\cdots\cdots ⑤$

⑤を④に代入して，$3(c^2 - bc + 1)^2 - b^2 - 4c^2 + 8bc - 4 = 0$

$$3c^4 + 3b^2c^2 - 6bc^3 + 2bc + 2c^2 - b^2 - 1 = 0$$

$$(3c^2-1)b^2 - 2c(3c^2-1)b + (3c^2-1)(c^2+1) = 0$$

$$(3c^2-1)(b^2 - 2cb + c^2 + 1) = 0,\quad (3c^2-1)\{(b-c)^2 + 1\} = 0$$

$(b-c)^2 + 1 > 0$, $c \geqq 0$ より，$c = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(2)　$c = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を①に代入して，$a^2 + b^2 = 4\left\{(a-1)^2 + \dfrac{1}{3}\right\}$

ここで，⑤より，$a = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}b + 1$，$b = \sqrt{3}\left(\dfrac{4}{3} - a\right)$であり，$a \geqq 0$, $b \geqq 0$ より，

$0 \leqq a \leqq \dfrac{4}{3}$ となるので,

$$\frac{4}{3} \leqq a^2 + b^2 \leqq \frac{16}{3}$$

以上より, AB の長さの最大値は$\sqrt{\dfrac{16}{3}} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$，最小値は$\sqrt{\dfrac{4}{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$である。

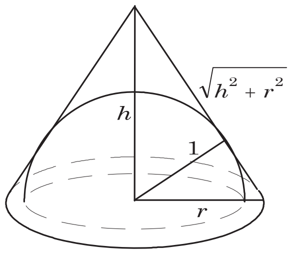
［解 説］

前問に続き，本問も複素数と考えましたが，同じ手段というのも気持ちが悪いので，座標計算だけで処理してみました。なお，設問から推測できるように，③かつ④だけで c の値がうまく求まります。

4

問題のページへ

(1)　円錐の底面の半径を r, 高さを h とすると, 母線の長さは $\sqrt{h^2+r^2}$ となる。



このとき, 右図の断面に注目して,

$$1 : r = h : \sqrt{h^2+r^2}\ ,\ \sqrt{h^2+r^2} = rh$$

$$h^2+r^2 = r^2h^2,\ r^2 = \frac{h^2}{h^2-1}$$

ここで, 円錐の表面積を S とすると,

$$S = \pi r^2 + \frac{1}{2}\cdot 2\pi r\sqrt{h^2+r^2} = \pi r^2 + \pi r^2 h = \pi(1+h)r^2$$

$$= \pi(1+h)\cdot\frac{h^2}{h^2-1} = \pi\cdot\frac{h^2}{h-1} = \pi\cdot\frac{1}{\frac{1}{h}-\frac{1}{h^2}}$$

ここで, $\frac{1}{h}=t$ とおくと, $h>1$ より $0<t<1$ となり, さらに $f(t)=t-t^2$ とすると, $S=\frac{\pi}{f(t)}$ である。

$f(t) = -\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\leqq\frac{1}{4}$ より, $S\geqq 4\pi$ となり, S の最小値は 4π である。

(2)　円錐の体積を V とすると,

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\cdot\frac{h^3}{h^2-1} = \frac{1}{3}\pi\cdot\frac{1}{\frac{1}{h}-\frac{1}{h^3}}$$

(1)と同様にして, $g(t)=t-t^3$ とおくと, $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{g(t)}$

$$g'(t) = 1-3t^2$$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	0

右表より, $g(t)\leqq\frac{2}{3\sqrt{3}}$ となる。これより, $V\geqq\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$ となり, V の最小値は $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$ である。

[解 説]

S の最小値は相加平均と相乗平均の関係を用いて求められましたが, V の最小値についてはうまくいきません。そこで, 考え直して作ったのが上の解です。

5

問題のページへ

(1)　試行が 1 回目で終了するのは, 1 回目の結果がすべて裏のときである。

$$p_1=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

試行が 2 回目で終了するのは，表の枚数に注目すると，次の 3 つの場合がある。

(i)　1 回目の結果が 3 枚→2 回目の結果が 0 枚のとき

1 回目の結果が 3 枚となる確率は$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$で，このとき 2 回目の結果が 0 枚となる確率は$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$である。

(ii)　1 回目の結果が 2 枚→2 回目の結果が 0 枚のとき

1 回目の結果が 2 枚となる確率は${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}$で，このとき 2 回目の結果が 0 枚となる確率は$\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$である。

(iii) 1 回目の結果が 1 枚→2 回目の結果が 0 枚のとき

1 回目の結果が 3 枚となる確率は${}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$で，このとき 2 回目の結果が 0 枚となる確率は$\frac{1}{2}$である。

(i)(ii)(iii)より，試行が 2 回目で終了する確率は,

$$p_2=\frac{1}{8}\times\frac{1}{8}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{2}=\frac{19}{64}$$

(2)　n 回目の試行を行うときに，表が 3 枚，2 枚，1 枚である確率をそれぞれa_n，b_n，c_nとすると，$q_n=a_n+b_n+c_n$である。また，最初の試行は 3 枚の硬貨を投げるので，$a_1=1$，$b_1=c_1=0$とすることができる。

n 回目の試行における表の枚数の推移を, (1)と同様に考えて,

$$a_{n+1}=\frac{1}{8}a_n\cdots\cdots①,\quad b_{n+1}=\frac{3}{8}a_n+\frac{1}{4}b_n\cdots\cdots②$$

$$c_{n+1}=\frac{3}{8}a_n+\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}c_n\cdots\cdots③$$

①＋②＋③より，$a_{n+1}+b_{n+1}+c_{n+1}=\frac{7}{8}a_n+\frac{3}{4}b_n+\frac{1}{2}c_n$なので,

$$q_{n+1}=\frac{7}{8}a_n+\frac{3}{4}b_n+\frac{1}{2}(q_n-a_n-b_n)=\frac{3}{8}a_n+\frac{1}{4}b_n+\frac{1}{2}q_n\cdots\cdots\cdots④$$

さて，①より，$a_n=a_1\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}$

②に代入して，$b_{n+1}=\frac{1}{4}b_n+\frac{3}{8}\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}$

$$b_{n+1}+3\left(\frac{1}{8}\right)^n=\frac{1}{4}\left\{b_n+3\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}\right\}$$

$$b_n+3\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}=\left\{b_1+3\left(\frac{1}{8}\right)^0\right\}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=3\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$b_n = 3\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - 3\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}$

④に代入して，$q_{n+1} = \frac{1}{2}q_n + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - \frac{3}{8}\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}$

$q_{n+1} + 3\left(\frac{1}{4}\right)^{n} - \left(\frac{1}{8}\right)^{n} = \frac{1}{2}\left\{q_n + 3\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}\right\}$

$q_n + 3\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1} = \left\{q_1 + 3\left(\frac{1}{4}\right)^{0} - \left(\frac{1}{8}\right)^{0}\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

以上より，$q_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 3\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}$

［解 説］

(1)と同じように(2)も考えると，上のような漸化式を解くことになります。設問に応じて考え方を変えるのは難しいことです。