1

解答解説のページへ

(1)　正の整数 n で n^3+1 が 3 で割り切れるものをすべて求めよ。

(2)　正の整数 n で n^n+1 が 3 で割り切れるものをすべて求めよ。

2

解答解説のページへ

複素数α，βは$|\alpha-1|=1$，$|\beta-i|=1$を満たす。

(1) $\alpha+\beta$が存在する範囲を複素数平面上に図示せよ。

(2) $(\alpha-1)(\beta-1)$が存在する範囲を複素数平面上に図示せよ。

3

解答解説のページへ

$a,\ c$ を実数とする。空間内の 4 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(2,\ 0,\ a)$，$\mathrm{B}(2,\ 1,\ 5)$，$\mathrm{C}(0,\ 1,\ c)$ は同一平面上にある。

(1) c を a で表せ。

(2) 四角形 OABC の面積の最小値を求めよ。

4

解答解説のページへ

$f(x)=x^3-x^2-x-1$, $g(x)=x^2-x-1$ とする。

(1) 方程式 $f(x)=0$ はただ 1 つの実数解 α をもつことを示せ。また, $1<\alpha<2$ であることを示せ。

(2) 方程式 $g(x)=0$ の正の解を β とする。α と β の大小を比較せよ。

(3) α^2 と β^3 の大小を比較せよ。

5

解答解説のページへ

1 が書かれたカードが 2 枚, 2 が書かれたカードが 2 枚, …, n が書かれたカードが 2 枚の合計 $2n$ 枚のカードがある。カードをよく混ぜ合わせた後, 1 枚ずつ左から順に並べる。このとき, カードに書かれている数の列を, a_1, a_2, …, a_{2n} とする。$a_k \geqq a_{k+1}$ $(1 \leqq k < 2n)$ となる最小の k を X とする。

(1)　$X=1$ となる確率を求めよ。

(2)　$X=n$ となる確率を求めよ。

(3)　m は $1 \leqq m < n$ を満たす整数とする。$X \geqq m$ となる確率を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　k を 0 以上の整数として, n を $n=3k+1,\ 3k+2,\ 3k+3$ と分類する。

(i)　$n=3k+1$ のとき

$$n^3+1=(3k+1)^3+1=3(9k^3+9k^2+3k)+2$$

(ii)　$n=3k+2$ のとき

$$n^3+1=(3k+2)^3+1=3(9k^3+18k^2+12k+3)$$

(iii)　$n=3k+3$ のとき

$$n^3+1=(3k+3)^3+1=3\cdot 3^2(k+1)^3+1$$

(i)(ii)(iii)より, $n=3k+2$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ のとき, n^3+1 は 3 で割り切れる。

(2)　$l=1,\ 2,\ 3$ とすると, 二項定理より,

$$(3k+l)^n=\sum_{i=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_i(3k)^{n-i}l^i=\sum_{i=0}^{n-1}3^{n-i}{}_n\mathrm{C}_i\,k^{n-i}l^i+l^n$$

ここで, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}3^{n-i}{}_n\mathrm{C}_i\,k^{n-i}l^i$ が 3 の倍数になっていることを利用して,

(i)　$n=3k+1$ のとき　N_1 を整数として

$$n^n+1=(3k+1)^n+1=3N_1+1^n+1=3N_1+2$$

(ii)　$n=3k+2$ のとき　$N_2,\ N_3$ を整数として

$$n^n+1=(3k+2)^n+1=3N_2+2^n+1=3N_2+(3-1)^n+1$$
$$=3N_2+3N_3+(-1)^n+1$$

n^n+1 が 3 の倍数となる条件は $n=3k+2$ が奇数, すなわち k が奇数となることなので, m を 0 以上の整数として,

$$n=3(2m+1)+2=6m+5$$

(iii)　$n=3k+3$ のとき

$$n^n+1=(3k+3)^n+1=3^n(k+1)^n+1$$

(i)(ii)(iii)より, $n=6m+5$ $(m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ のとき, n^n+1 は 3 で割り切れる。

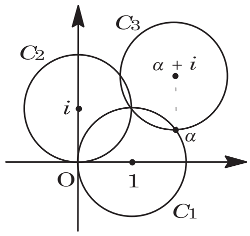
［解 説］

定番の整数問題です。(1)(2)とも, 3 で割った余りで整数を分類することがポイントとなっています。

2

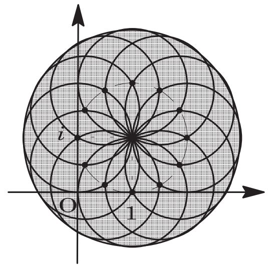
問題のページへ

(1)　$|\alpha-1|=1$ より，点 α は点 1 を中心とする半径 1 の円 C_1 上にある。また，$|\beta-i|=1$ より，点 β は点 i を中心とする半径 1 の円 C_2 上にある。



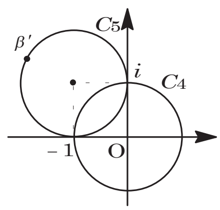
さて，$z=\alpha+\beta$ とおき，点 α を C_1 上に固定するとき，点 z は円 C_2 を α だけ平行移動した円，すなわち点 $\alpha+i$ を中心とする半径 1 の円 C_3 上にある。

そこで，点 α を円 C_1 上で動かすと，円 C_3 はこの関係を保ったまま動くことより，C_3 の中心 $\alpha+i$ は点 $1+i$ を中心とする半径 1 の円上を動く。



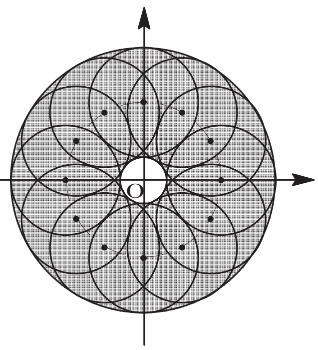
よって，円 C_3 全体は右図のように動く。すると，点 z の存在範囲は，点 $1+i$ を中心とする半径 2 の円の内部または周上となり，図示すると，右図の網点部となる。

(2)　$\alpha'=\alpha-1$ とおくと，点 α' は原点を中心とする半径 1 の円 C_4 上にある。また，$\beta'=\beta-1$ とおくと，点 β' は点 $-1+i$ を中心とする半径 1 の円 C_5 上にある。



さて，$w=(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha'\beta'$ とおき，点 β' を円 C_5 上に固定するとき，$|\alpha'|=1$ より，点 w は点 β' を原点のまわりに回転した円上にある。

そこで，点 β' を円 C_5 上で動かすと，円 C_5 全体が原点のまわりを右図のように回転する。すると，点 w の存在範囲は，原点を中心とする半径 $\sqrt{2}+1$，$\sqrt{2}-1$ の 2 つの同心円にはさまれたドーナツ状の部分（境界を含む）となり，図示すると，右図の網点部となる。



［解 説］

いくら書いても真意が伝わらないような感じのする解の書きにくい問題です。言い換えると，表現力を養うための良問です。

3

問題のページへ

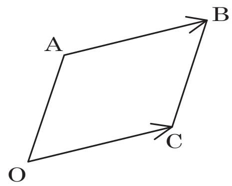
(1)　4点O, A, B, Cが同一平面上にあるので，x, yを実数として，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$と表せる。

$$(0,\ 1,\ c)=x(2,\ 0,\ a)+y(2,\ 1,\ 5)$$

$$2x+2y=0\cdots\cdots①,\quad y=1\cdots\cdots②,\quad ax+5y=c\cdots\cdots③$$

①②より$x=-1$，$y=1$となり，③に代入すると$c=-a+5$となる。

(2)　(1)より，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$となり，四角形 OABCは平行四辺形である。その面積をSとすると,



$$S=\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}})^2}$$

$$=\sqrt{(4+a^2)(1+c^2)-(ac)^2}=\sqrt{4+a^2+4c^2}$$

(1)より，$c=-a+5$なので,

$$4+a^2+4c^2=4+a^2+4(-a+5)^2=5a^2-40a+104$$

$$=5(a-4)^2+24\geqq 24$$

よって，$a=4$のときSは最小値$\sqrt{24}=2\sqrt{6}$をとる。

［解 説］

四角形が平行四辺形となるために，今年の 5 問の中で，いちばん楽に解ける問題です。

4

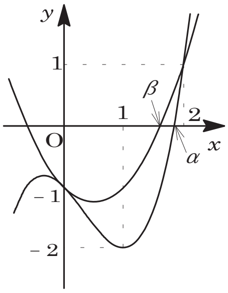
問題のページへ

(1)　$f(x)=x^3-x^2-x-1$ より，

$$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-\frac{22}{27}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$

極大値 $f\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{22}{27}<0$ なので，右表より方程式 $f(x)=0$ はただ 1 つの実数解をもつ。さらに，$f(1)=-2$，$f(2)=1$ より，その実数解 α は $1<\alpha<2$ である。



(2)　$h(x)=f(x)-g(x)$ とおくと，

$$h(x)=(x^3-x^2-x-1)-(x^2-x-1)$$
$$=x^3-2x^2=x^2(x-2)$$

すると，$0<x<2$ において，$f(x)<g(x)$

さて，$\beta^2-\beta-1=0\ (\beta>0)$ より，$\beta=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ なので，

$$f(\beta)<g(\beta)=0$$

よって，$f(\beta)<f(\alpha)=0$ から $\beta<\alpha$ である。

(3)　まず，$\beta^2=\beta+1$ から，

$$\beta^3=\beta(\beta+1)=\beta^2+\beta=2\beta+1=2\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1=2+\sqrt{5}$$

すると，$1<\alpha<2$ より，$\beta^3-\alpha^2=2+\sqrt{5}-\alpha^2>2+\sqrt{5}-4=\sqrt{5}-2>0$

よって，$\beta^3>\alpha^2$

[解　説]

β の値が具体的にわかるため，それを利用すると，方針が立てやすくなります。

5

問題のページへ

(1)　$X=1$ となるのは $a_1 \geqq a_2$ の場合で，a_3，…，a_{2n} は任意である。

(i)　$a_1 > a_2$ のとき

1 から n までの数から 2 つ選び，大きい方を a_1，小さい方を a_2 に対応させる。各数の書かれているカードは 2 枚ずつあるので，このときの確率は，

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_2 \times 2^2}{{}_{2n}\mathrm{P}_2} = \frac{2n(n-1)}{2n(2n-1)} = \frac{n-1}{2n-1}$$

(ii)　$a_1 = a_2$ のとき

1 から n までの数から 1 つ選び，それを a_1，a_2 に対応させる。その数の書かれているカードは 2 枚あるので，このときの確率は，

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_1 \times 2}{{}_{2n}\mathrm{P}_2} = \frac{2n}{2n(2n-1)} = \frac{1}{2n-1}$$

(i)(ii)より，$X=1$ となる確率は，$\dfrac{n-1}{2n-1} + \dfrac{1}{2n-1} = \dfrac{n}{2n-1}$ である。

(2)　$X=n$ となるのは $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{n-1} < a_n \geqq a_{n+1}$ の場合で，a_{n+2}，…，a_{2n} は任意である。このときは，$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=3$，…，$a_{n-1}=n-1$，$a_n=n$ の場合しかなく，しかも $a_n \geqq a_{n+1}$ はつねに成立する。

各数の書かれているカードは 2 枚ずつあるので，$X=n$ となる確率は，

$$\frac{2^n}{{}_{2n}\mathrm{P}_n} = \frac{2^n n!}{(2n)!}$$

(3)　$1 \leqq m < n$ を満たす整数に対して，$X \geqq m$ となるのは $a_1 < a_2 < \cdots < a_{m-1} < a_m$ の場合で，a_{m+1}，…，a_{2n} は任意である。

すると，1 から n までの数から m 個選び，小さい方から a_1，a_2，…，a_m を対応させる。各数の書かれているカードは 2 枚ずつあるので，$X \geqq m$ となる確率は，

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_m \times 2^m}{{}_{2n}\mathrm{P}_m} = \frac{\dfrac{n!}{(n-m)!m!} \cdot 2^m}{\dfrac{(2n)!}{(2n-m)!}} = \frac{2^m n!(2n-m)!}{(2n)!(n-m)!m!}$$

[解 説]

題意を読みとることができれば，有名な対応問題であることがわかります。このことは，(3)についても同様です。