1

解答解説のページへ

H を 1 辺の長さが 1 の正六角形とする。

(1)　H の中にある正方形のうち，1 辺が H の 1 辺と平行なものの面積の最大値を求めよ。

(2)　H の中にある長方形のうち，1 辺が H の 1 辺と平行なものの面積の最大値を求めよ。

2

解答解説のページへ

$a,\ b,\ c$ は整数で, $a<b<c$ を満たす。放物線 $y=x^2$ 上に 3 点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$, $\mathrm{B}(b,\ b^2)$, $\mathrm{C}(c,\ c^2)$ をとる。

(1) $\angle\mathrm{BAC}=60^\circ$ とはならないことを示せ。ただし, $\sqrt{3}$ が無理数であることを証明なしに用いてよい。

(2) $a=-3$ のとき, $\angle\mathrm{BAC}=45^\circ$ となる組 $(b,\ c)$ をすべて求めよ。

3

解答解説のページへ

複素数平面上に異なる 3 点 z, z^2, z^3 がある。

(1)　z, z^2, z^3 が同一直線上にあるような z をすべて求めよ。

(2)　z, z^2, z^3 が二等辺三角形の頂点になるような z の全体を複素数平面上に図示せよ。また, z, z^2, z^3 が正三角形の頂点になるような z をすべて求めよ。

4

解答解説のページへ

a は実数とし，$f(x)=x^3+ax^2-8a^2x$，$g(x)=3ax^2-9a^2x$ とおく。

(1)　曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点 P において両方の曲線と接する直線が存在する。このとき P の座標を a で表せ。

(2)　次の条件(i)および(ii)を満たす直線 l が 3 本存在するような点 $(u,\ v)$ の範囲を図示せよ。

(i)　l は点 $(u,\ v)$ を通る。

(ii)　l は曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点 P において両方の曲線と接する。

5

解答解説のページへ

n 枚のカードがあり, 1 枚目のカードに 1, 2 枚目のカードに 2, …, n 枚目のカードに n が書かれている。これらの n 枚のカードのから無作為に 1 枚を取り出してもとに戻し, もう一度無作為に 1 枚を取り出す。取り出されたカードに書かれている数をそれぞれ x, y とする。また, k を n の約数とする。

(1)　$x+y$ が k の倍数となる確率を求めよ。

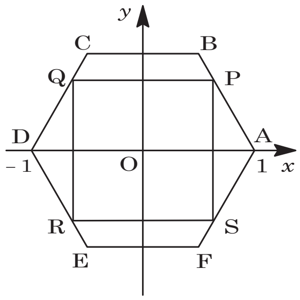
(2)　さらに, $k=pq$ とする。ただし, p, q は異なる素数である。xy が k の倍数となる確率を求めよ。

1

問題のページへ

(1) 原点を正六角形の中心とし，右図のように座標軸を設定して，両軸に平行な正方形 PQRS を考える。

すると，対称性から正方形の面積が最大となるのは，頂点 P，Q，R，S が各象限に配置され，正方形の中心が原点となるときである。すると，4 つの頂点は辺 AB, CD, DE, FA 上にあることになる。



さて，辺 AB を表す直線は，$y=-\sqrt{3}(x-1)$ であり，直線 $y=x$ との交点が，右図の頂点 P の位置なので，

$$x=-\sqrt{3}(x-1),\ \ x=\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

よって，$\mathrm{P}\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2},\ \frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)$となり，求める正方形の面積の最大値は，

$$\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^2\times 4=12-6\sqrt{3}$$

(2) (1)と同様に考えて，第 1 象限にある頂点 P の位置を考える。

まず，辺 BC 上にあるとき，長方形の面積が最大になるのは，明らかに頂点 P が六角形の頂点$\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$に一致する場合である。

また，点 P が辺 AB 上にあるとき，$\frac{1}{2}\leqq t\leqq 1$として，$\mathrm{P}(t,\ -\sqrt{3}(t-1))$とおくと，長方形の面積 S は，

$$S=-\sqrt{3}t(t-1)\times 4=-4\sqrt{3}(t^2-t)=-4\sqrt{3}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\sqrt{3}$$

よって，$t=\frac{1}{2}$のとき，S は最大値をとる。

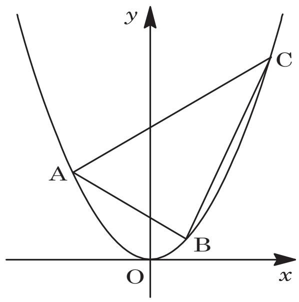
以上より，点 P が辺 BC 上，辺 CA 上のいずれでも，点 B に一致するとき長方形の面積は最大となり，その最大値は $\sqrt{3}$ である。

［解 説］

ドローソフトはずっと「花子」を使っていますが，上の図でも，題意に合致する正方形を描くときに，適当な大きさの正方形をかき，その後，選択マークをドラッグして最大の大きさのものに拡大しました。内容としては同じなのですが，このプロセスを記述するのは，簡単とは言えません。上の解よりも，もう少し詳述したほうがよかったかもしれません。

2

問題のページへ



(1)　$A(a,\ a^2)$，$B(b,\ b^2)$より，直線ABの傾きは,

$$\frac{b^2-a^2}{b-a}=b+a$$

また$C(c,\ c^2)$より，直線ACの傾きは$c+a$となる。

ここで，直線AC, ABとx軸の正の向きとのなす角をそれぞれα，β $(-90°<\alpha<90°,\ -90°<\beta<90°)$とおくと,

$$\tan\alpha=c+a,\ \tan\beta=b+a$$

$b<c$より，$\beta<\alpha$となり，$\angle BAC=\alpha-\beta$である。

そこで，$\angle BAC=60°$から，加法定理を用いて,

$$\tan 60°=\frac{(c+a)-(b+a)}{1+(c+a)(b+a)},\ \sqrt{3}=\frac{c-b}{1+(c+a)(b+a)}\cdots\cdots\cdots(*)$$

(＊)の左辺は無理数，またa, b, cが整数なので右辺は有理数となり成立しない。

よって，$\angle BAC=60°$とはならない。

(2)　$a=-3$，$\angle BAC=45°$のとき, (1)と同様にして,

$$1=\frac{c-b}{1+(c-3)(b-3)},\ bc-3b-3c+10=c-b,\ bc-2b-4c+10=0$$

すると，$(b-4)(c-2)=-2$より，$b-4$，$c-2$は-2の約数である。

$$(b-4,\ c-2)=(1,\ -2),\ (-1,\ 2),\ (2,\ -1),\ (-2,\ 1)$$

よって，$(b,\ c)=(5,\ 0),\ (3,\ 4),\ (6,\ 1),\ (2,\ 3)$

$-3<b<c$を満たすのは，$(b,\ c)=(3,\ 4),\ (2,\ 3)$

［解 説］

(1)の60°という角度の利用法は，sinを使うのであれば三角形の面積，cosであればベクトルの内積，tanであれば加法定理というのが，オーソドックスな線です。$\sqrt{3}$が絡むのはsinとtanです。それで，$\sqrt{3}$そのもののtanで解を書きました。

3

問題のページへ

(1)　3 点z，z^2，z^3が異なるので，$z \neq z^2$から$z \neq 0$，$z \neq 1$，また$z \neq z^3$から$z \neq 0$，$z \neq \pm 1$，さらに$z^3 \neq z^2$から$z \neq 0$，$z \neq 1$である。まとめて，$z \neq 0$，$z \neq \pm 1$となる。

さて，z，z^2，z^3が同一直線上にある条件は, kを実数として,

$$z^3 - z = k(z^2 - z)\text{，}\ z(z+1)(z-1) = kz(z-1)$$

$z \neq 0$，$z \neq 1$より，$z+1=k$，すなわちzは実数である。

したがって，条件を満たすzは，0，± 1以外の実数である。

(2)　z，z^2，z^3が二等辺三角形の頂点になるのは, (1)よりzが実数でないもとで,

(i)　$|z^2 - z| = |z^3 - z|$のとき

$$|z||z-1| = |z||z-1||z+1|$$

(1)より，$|z| \neq 0$，$|z-1| \neq 0$なので，$|z+1| = 1$

点zは点-1を中心とする半径 1 の円周上にある。ただし実軸上の点は除く。

(ii)　$|z^2 - z| = |z^3 - z^2|$のとき

$$|z||z-1| = |z|^2|z-1|$$

(1)より，$|z| \neq 0$，$|z-1| \neq 0$なので，$|z| = 1$

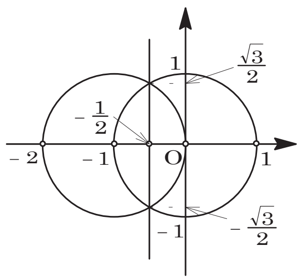
点zは原点を中心とする半径 1 の円周上にある。ただし実軸上の点は除く。

(iii)　$|z^3 - z| = |z^3 - z^2|$のとき

$$|z||z+1||z-1| = |z|^2|z-1|$$

(1)より，$|z| \neq 0$，$|z-1| \neq 0$なので，$|z+1| = |z|$

点 z は点-1と原点を結ぶ線分の垂直二等分線上にある。ただし実軸上の点は除く。



(i)(ii)(iii)より，z，z^2，z^3が二等辺三角形の頂点になる z 全体は右図のようになる。なお, 実軸上の点は除く。

また，z，z^2，z^3が正三角形の頂点になるのは，右図の交点より,

$$z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

［解 説］

複素数平面を題材とした標準的な問題で, うまく誘導がつけられています。

4

問題のページへ

(1) 曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の接点 P の x 座標を $x=t$ とおくと,

$$f(t)=g(t)\cdots\cdots\cdots①,\quad f'(t)=g'(t)\cdots\cdots\cdots②$$

①より, $t^3+at^2-8a^2t=3at^2-9a^2t$, $t^3-2at^2+a^2t=0$
すると, $t(t-a)^2=0$ から, $t=0,\ a\cdots\cdots\cdots③$

②より, $3t^2+2at-8a^2=6at-9a^2$, $3t^2-4at+a^2=0$
すると, $(3t-a)(t-a)=0$ から, $t=\dfrac{a}{3},\ a\cdots\cdots\cdots④$

(i) $t=a$ のとき　③④をともに満たす。

(ii) $t\neq a$ のとき　③より $t=0$, ④より $t=\dfrac{a}{3}$ で $a=0$ となるが, $t\neq a$ に反する。

(i)(ii)より, $t=a$ から, $\mathrm{P}(a,\ -6a^3)$ となる。

(2) (1)より $\mathrm{P}(a,\ -6a^3)$ なので, $f'(a)=-3a^2$ から, 直線 l の方程式は,

$$y+6a^3=-3a^2(x-a),\quad y=-3a^2x-3a^3$$

点 $(u,\ v)$ を通ることより, $v=-3a^2u-3a^3\cdots\cdots\cdots⑤$

直線 l が 3 本存在する条件は, ⑤が異なる 3 個の実数解 a をもつことである。
さて, $h(a)=-3a^3-3ua^2$ とおくと, $h'(a)=-9a^2-6ua=-3a(3a+2u)$ より,

(i) $0<-\dfrac{2}{3}u\ (u<0)$ のとき

a	$\cdots$	0	$\cdots$	$-\dfrac{2}{3}u$	$\cdots$
$h'(a)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(a)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$-\dfrac{4}{9}u^3$	$\searrow$

$h(a)$ の増減は右表のようになり, 求める条件は, $0<v<-\dfrac{4}{9}u^3$ である。

(ii) $0=-\dfrac{2}{3}u\ (u=0)$ のとき

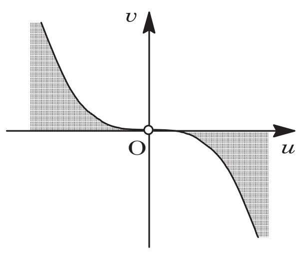
$h'(a)=-9a^2\leqq 0$ となり, $h(a)$ は単調減少するので不適である。

(iii) $0>-\dfrac{2}{3}u\ (u>0)$ のとき

a	$\cdots$	$-\dfrac{2}{3}u$	$\cdots$	0	$\cdots$
$h'(a)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(a)$	$\searrow$	$-\dfrac{4}{9}u^3$	$\nearrow$	0	$\searrow$

$h(a)$ の増減は右表のようになり, 求める条件は, $-\dfrac{4}{9}u^3<v<0$ である。

(i)(ii)(iii)より, 点 $(u,\ v)$ の範囲を図示すると, 右図の網点部のようになる。
ただし, 境界は領域に含まない。



［解 説］

題意に一ひねりがありますが, 接線の本数を接点の個数に言い換えるという頻出の問題です。

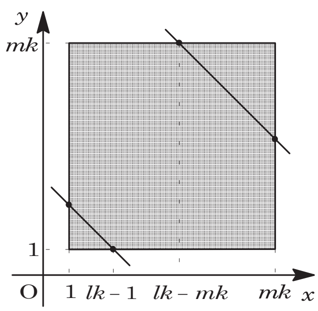
5

問題のページへ

(1)　k を n の約数とするとき，$\dfrac{n}{k}=m$ とおき，$2n$ 以下の k の倍数を表すと，

$$k,\ 2k,\ \cdots,\ mk,\ (m+1)k,\ \cdots,\ 2mk$$

さて，$1\leqq x\leqq n$，$1\leqq y\leqq n$ を満たし，$x+y=lk$ $(1\leqq l\leqq 2m)$ となる $(x,\ y)$ は，右図の直線上の，正方形の内部または辺上に位置する格子点として図示できる。



(i)　$1\leqq l\leqq m$ のとき

線分 $x+y=lk$ $(1\leqq x\leqq lk-1)$ 上の格子点の個数は，$(lk-1)-1+1=lk-1$

(ii)　$m+1\leqq l\leqq 2m$ のとき

線分 $x+y=lk$ $(lk-mk\leqq x\leqq mk)$ 上の格子点の個数は，

$$mk-(lk-mk)+1=2mk-lk+1$$

(i)(ii)より，格子点の総数 N は，$N=\displaystyle\sum_{l=1}^{m}(lk-1)+\sum_{l=m+1}^{2m}(2mk-lk+1)$ となる。

そこで，$l'=2m-l+1$ とおくと，

$$N=\sum_{l=1}^{m}(lk-1)+\sum_{l'=1}^{m}\left\{2mk-(2m+1-l')k+1\right\}$$
$$=\sum_{l=1}^{m}(lk-1)+\sum_{l'=1}^{m}(l'k-k+1)=\sum_{l=1}^{m}(lk-1)+\sum_{l=1}^{m}(lk-k+1)$$
$$=\sum_{l=1}^{m}(2lk-k)=2k\cdot\frac{1}{2}m(m+1)-km=km^2=k\cdot\frac{n^2}{k^2}=\frac{n^2}{k}$$

よって，$x+y$ が k の倍数となる確率は，$\dfrac{N}{n^2}=\dfrac{n^2}{k}\cdot\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{1}{k}$ である。

(2)　xy が p の倍数である事象を A，q の倍数である事象を B とすると，p と q が異なる素数なので, xy が $k=pq$ の倍数となる事象は $A\cap B$ となる。

$$P(A\cap B)=1-P(\overline{A\cap B})=1-P(\overline{A}\cup\overline{B})=1-P(\overline{A})-P(\overline{B})+P(\overline{A}\cap\overline{B})$$

さて, p は n の約数なので, x が p の倍数である確率は $\dfrac{1}{p}$, y が p の倍数である確率も $\dfrac{1}{p}$ である。

すると, x と y がともに p の倍数でない事象 $\overline{A}$ の確率は,

$$P(\overline{A})=\left(1-\frac{1}{p}\right)^2=\frac{(p-1)^2}{p^2}$$

同様にして，$P(\overline{B})=\left(1-\dfrac{1}{q}\right)^2=\dfrac{(q-1)^2}{q^2}$

また, x が p の倍数または q の倍数である確率は $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}-\dfrac{1}{pq}$, y が p の倍数または q の倍数である確率も $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}-\dfrac{1}{pq}$ である。

すると, x と y がともに p の倍数でも q の倍数でもない事象 $\overline{A}\cap\overline{B}$ の確率は,

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=\left(1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+\frac{1}{pq}\right)^2=\frac{(pq-p-q+1)^2}{p^2q^2}=\frac{(p-1)^2(q-1)^2}{p^2q^2}$$

以上より, xy が k の倍数となる確率は,

$$P(A\cap B)=1-\frac{(p-1)^2}{p^2}-\frac{(q-1)^2}{q^2}+\frac{(p-1)^2(q-1)^2}{p^2q^2}$$
$$=\frac{p^2q^2-q^2(p-1)^2-p^2(q-1)^2+(p-1)^2(q-1)^2}{p^2q^2}$$
$$=\frac{\{p^2-(p-1)^2\}\{q^2-(q-1)^2\}}{p^2q^2}=\frac{(2p-1)(2q-1)}{p^2q^2}$$

［解 説］

一橋大らしい難易度の高い確率の問題です。p, q, k, n に具体的に数値をあてはめて, じっくり考えると解法の道筋が見えてきます。なお, (2)では場合分けを避けたかったので, 余事象を利用して解いています。