1

解答解説のページへ

k は整数であり，3 次方程式 $x^3-13x+k=0$ は 3 つの異なる整数解をもつ。k とこれらの整数解をすべて求めよ。

2

解答解説のページへ

原点を中心とする半径 1 の円を C とし，$0<a<1$，$b>1$ とする。A$(a,\ 0)$ と N$(0,\ 1)$ を通る直線が C と交わる点のうち N と異なるものを P とおく。また，B$(b,\ 0)$ と N を通る直線が C と交わる点のうち N と異なるものを Q とおく。

(1)　P の座標を a で表せ。

(2)　AQ // PB のとき，$\mathrm{AN}\cdot\mathrm{BN}=2$ となることを示せ。

(3)　AQ // PB，$\angle\mathrm{ANB}=45^\circ$ のとき，a の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ を満たす θ と正の整数 m に対して，$f_m(\theta)$ を次のように定める。

$$f_m(\theta) = \sum_{k=0}^{m} \sin(\theta + 60^\circ \times k)$$

(1)　$f_5(\theta)$ を求めよ。

(2)　θ が $0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ の範囲を動くとき，$f_4(\theta)$ の最大値を求めよ。

(3)　m がすべての正の整数を動き，θ が $0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ の範囲を動くとき，$f_m(\theta)$ の最大値を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

aを定数とし, xの 2 次関数$f(x)$，$g(x)$を次のように定める。

$$f(x)=x^2-3,\quad g(x)=-2(x-a)^2+\frac{a^2}{3}$$

(1)　2 つの放物線$y=f(x)$と$y=g(x)$が 2 つの共有点をもつようなaの範囲を求めよ。

(2)　(1)で求めた範囲に属する a に対して, 2 つの放物線によって囲まれる図形をC_aとする。C_aの面積をaで表せ。

(3)　a が(1)で求めた範囲を動くとき, 少なくとも 1 つのC_aに属する点全体からなる図形の面積を求めよ。

5

解答解説のページへ

A と B の 2 人があるゲームを繰り返し行う。1 回ごとのゲームで A が B に勝つ確率は p，B が A に勝つ確率は$1-p$ であるとする。n 回目のゲームで初めて A と B の双方が 4 勝以上になる確率を x_n とする。

(1)　x_n を p と n で表せ。

(2)　$p=\dfrac{1}{2}$ のとき，x_n を最大にする n を求めよ。

1

問題のページへ

$x^3-13x+k=0$……(＊)より，$k=-x^3+13x$ となる。

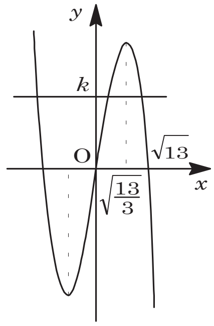
ここで，$f(x)=-x^3+13x$ とおくと，

$$f'(x)=-3x^2+13$$

x	$\cdots$	$-\sqrt{\frac{13}{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{\frac{13}{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

さて，$y=f(x)$ のグラフは原点対称なので，まず $k\geqq 0$ のとき，(＊)の整数解を考える。

さて，$2<\sqrt{\frac{13}{3}}<3$，$3<\sqrt{13}<4$ なので，右図より(＊)の最大の整数解は $x=3$ である。



このとき，$k=-27+39=12$ となり，(＊)は，

$$x^3-13x+12=0，(x-3)(x+4)(x-1)=0$$

よって，整数解は $x=-4,\ 1,\ 3$

また，$k<0$ のときは，対称性から，$k=-12$ のとき，整数解 $x=4,\ -1,\ -3$ をもつ。

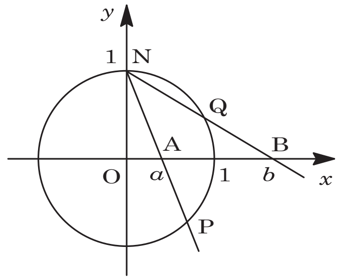
以上より，(＊)は，$k=12$ のとき $x=-4,\ 1,\ 3$，$k=-12$ のとき $x=4,\ -1,\ -3$ を整数解としてもつ。

［解 説］

$k\geqq 0$ のとき，最大の整数解の候補が 1 つだけでしたので，場合分けは不要でした。

2

問題のページへ



(1)　直線 NA の方程式は，$y=-\dfrac{1}{a}x+1$

円 $C: x^2+y^2=1$ との交点は，

$$x^2+\left(-\frac{1}{a}x+1\right)^2=1,\ (a^2+1)x^2-2ax=0$$

$x\neq 0$ より，$x=\dfrac{2a}{a^2+1}$

$$y=-\frac{1}{a}\cdot\frac{2a}{a^2+1}+1=\frac{a^2-1}{a^2+1}$$

よって，$\mathrm{P}\left(\dfrac{2a}{a^2+1},\ \dfrac{a^2-1}{a^2+1}\right)$となる。

(2)　(1)と同様にして，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{2b}{b^2+1},\ \dfrac{b^2-1}{b^2+1}\right)$から，

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\left(\frac{2b}{b^2+1}-a,\ \frac{b^2-1}{b^2+1}\right),\ \overrightarrow{\mathrm{BP}}=\left(\frac{2a}{a^2+1}-b,\ \frac{a^2-1}{a^2+1}\right)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\parallel\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ より，$\dfrac{a^2-1}{a^2+1}\left(\dfrac{2b}{b^2+1}-a\right)-\dfrac{b^2-1}{b^2+1}\left(\dfrac{2a}{a^2+1}-b\right)=0$

$$(a^2-1)2b-a(a^2-1)(b^2+1)-(b^2-1)2a+b(b^2-1)(a^2+1)=0$$

$$ab(a-b)+3(a-b)-a^2b^2(a-b)-(a^3-b^3)=0$$

$a\neq b$ より，$ab+3-a^2b^2-(a^2+ab+b^2)=0$，$a^2b^2+a^2+b^2=3$ ………①

$$(a^2+1)(b^2+1)=4,\ \sqrt{a^2+1}\sqrt{b^2+1}=2$$

よって，$\mathrm{AN}\cdot\mathrm{BN}=2$ となる。

(3)　(2)より，$\overrightarrow{\mathrm{NA}}=(a,\ -1)$，$\overrightarrow{\mathrm{NB}}=(b,\ -1)$，$|\overrightarrow{\mathrm{NA}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{NB}}|=2$

また，条件より，$\overrightarrow{\mathrm{NA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{NB}}=|\overrightarrow{\mathrm{NA}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{NB}}|\cos 45^\circ$ なので，

$$ab+1=2\times\frac{\sqrt{2}}{2},\ ab=\sqrt{2}-1\ \cdots\cdots\cdots ②$$

①より，$a^2b^2+(a+b)^2-2ab=3$ から，②を代入すると，

$$(a+b)^2=3+2(\sqrt{2}-1)-(\sqrt{2}-1)^2=4\sqrt{2}-2$$

$a+b>0$ より，$a+b=\sqrt{4\sqrt{2}-2}$ ………③

②③より，a, b は，$x^2-\sqrt{4\sqrt{2}-2}\,x+(\sqrt{2}-1)=0$ の解であり，$a<b$ から，

$$a=\frac{\sqrt{4\sqrt{2}-2}-\sqrt{4\sqrt{2}-2-4(\sqrt{2}-1)}}{2}=\frac{\sqrt{4\sqrt{2}-2}-\sqrt{2}}{2}$$

この値は $0<a<1$ を満たす。

［解　説］

愚直に解きましたが，a の値が，答としては，ためらうものでした。

3

問題のページへ

(1)　$f_5(\theta)=\sum_{k=0}^{5}\sin(\theta+60°\times k)=\sin\theta+\sin(\theta+60°)+\sin(\theta+120°)+\sin(\theta+180°)$

$+\sin(\theta+240°)+\sin(\theta+300°)$

ここで，$\sin(\theta+180°)=-\sin\theta$ より，

$\sin(\theta+240°)=-\sin(\theta+60°)$，$\sin(\theta+300°)=-\sin(\theta+120°)$

よって，$f_5(\theta)=0$

(2)　(1)より，$f_4(\theta)=f_5(\theta)-\sin(\theta+300°)=\sin(\theta+120°)$

$0°\leqq\theta<360°$ より，$f_4(\theta)$ は，$\theta+120°=360°+90°$ $(\theta=330°)$ のとき，最大値 1 をとる。

(3)　(1)より, k を 0 以上の整数として, m の値を場合分けする。

(i)　$m=6k+6$ のとき　$f_m(\theta)=\sin\theta$

よって，$\theta=90°$ のとき，最大値 1 をとる。

(ii)　$m=6k+5$ のとき　(1)より，$f_m(\theta)=0$

(iii)　$m=6k+4$ のとき　(2)より，$f_m(\theta)=\sin(\theta+120°)$

よって，$\theta=330°$ のとき，最大値 1 をとる。

(iv)　$m=6k+3$ のとき

$f_m(\theta)=\sin(\theta+60°)+\sin(\theta+120°)=2\sin(\theta+90°)\cos 30°=\sqrt{3}\cos\theta$

よって，$\theta=0°$ のとき，最大値 $\sqrt{3}$ をとる。

(v)　$m=6k+2$ のとき

$f_m(\theta)=\sin\theta+\sin(\theta+60°)+\sin(\theta+120°)=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$

$=2\sin(\theta+60°)$

よって，$\theta+60°=90°$ $(\theta=30°)$ のとき，最大値 2 をとる。

(vi)　$m=6k+1$ のとき

$f_m(\theta)=\sin\theta+\sin(\theta+60°)=2\sin(\theta+30°)\cos 30°=\sqrt{3}\sin(\theta+30°)$

よって，$\theta+30°=90°$ $(\theta=60°)$ のとき，最大値 $\sqrt{3}$ をとる。

(i)〜(vi)より，$f_m(\theta)$ の最大値は 2 である。

［解 説］

設問はハッタリのきいたものでしたが，(1)から周期性が発見できますので，後は記述力です。

4

問題のページへ

(1) 放物線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が 2 つの共有点をもつとき，$f(x)=g(x)$ は異なる 2 つの実数解をもつことより，

$$x^2-3=-2(x-a)^2+\frac{a^2}{3},\ 3x^2-4ax+\frac{5}{3}a^2-3=0\ \cdots\cdots\cdots①$$

①の判別式 $D/4=4a^2-3\left(\frac{5}{3}a^2-3\right)=-a^2+9>0$ から，$-3<a<3$ となる。

(2) $-3<a<3$ のとき，①の実数解は $x=\dfrac{2a\pm\sqrt{9-a^2}}{3}$ となる。これを $x=\alpha,\ \beta$ $(\alpha<\beta)$ とおくと, 2 つの放物線によって囲まれる図形 C_a の面積 S は,

$$S=\int_\alpha^\beta\left\{-2(x-a)^2+\frac{a^2}{3}-(x^2-3)\right\}dx=-3\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$=-3\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{9-a^2}}{3}\right)^3=\frac{4}{27}\left(\sqrt{9-a^2}\right)^3$$

(3) $y\leqq g(x)=-2(x-a)^2+\dfrac{a^2}{3}$ から，$y\leqq-\dfrac{5}{3}a^2+4xa-2x^2$

ここで，$h(a)=-\dfrac{5}{3}a^2+4xa-2x^2$ とおくと，$h(a)=-\dfrac{5}{3}\left(a-\dfrac{6}{5}x\right)^2+\dfrac{2}{5}x^2$

さて，$-3<a<3$ のとき，x を固定して，領域 $y\leqq g(x)$，すなわち $y\leqq h(a)$ の動く平面上の部分を考える。

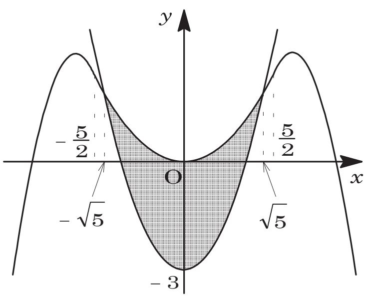
(i) $\dfrac{6}{5}x\leqq-3\ \left(x\leqq-\dfrac{5}{2}\right)$ のとき　$y<h(-3)=-15-12x-2x^2$

(ii) $-3<\dfrac{6}{5}x<3\ \left(-\dfrac{5}{2}<x<\dfrac{5}{2}\right)$ のとき

$$y\leqq h\left(\frac{6}{5}x\right)=\frac{2}{5}x^2$$

(iii) $\dfrac{6}{5}x\geqq3\ \left(x\geqq\dfrac{5}{2}\right)$ のとき

$$y<h(3)=-15+12x-2x^2$$



(i)～(iii)の部分と，領域 $y\geqq f(x)$ を合わせると，少なくとも 1 つの C_a に属する点全体からなる図形が得られ，図示すると右上図の網点部となる。この面積は,

$$\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}\left\{\frac{2}{5}x^2-(x^2-3)\right\}dx=-\frac{3}{5}\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})\,dx$$

$$=-\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(\sqrt{5}+\sqrt{5})^3=4\sqrt{5}$$

［解 説］

(3)では，領域の動く部分を，x の値を固定して，y のとり得る値の範囲として求めました。そこまで，やることはなかったのですが。

5

問題のページへ

(1)　n 回目のゲームで初めて A と B の双方が 4 勝以上になるのは，次の 2 つの場合がある。ただし, $n \geqq 8$ とする。

(i)　$n-1$ 回目までのゲームで A が 3 勝, B は 4 勝以上のとき

n 回目は A が勝つことより，その確率は,

$${}_{n-1}\mathrm{C}_3 p^3(1-p)^{n-4}\cdot p = {}_{n-1}\mathrm{C}_3 p^4(1-p)^{n-4}$$

(ii)　$n-1$ 回目までのゲームで A が 4 勝以上, B は 3 勝のとき

n 回目は B が勝つことより，その確率は,

$${}_{n-1}\mathrm{C}_3 p^{n-4}(1-p)^3\cdot(1-p) = {}_{n-1}\mathrm{C}_3 p^{n-4}(1-p)^4$$

(i)(ii)より，$x_n = {}_{n-1}\mathrm{C}_3 p^4(1-p)^{n-4} + {}_{n-1}\mathrm{C}_3 p^{n-4}(1-p)^4$

$$= \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3)p^4(1-p)^4\{(1-p)^{n-8}+p^{n-8}\}$$

なお, $n \leqq 7$ のときは，$x_n = 0$ である。

(2)　$p = \frac{1}{2}$ のとき, $n \geqq 8$ において,

$$x_n = \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3)\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-8}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-8}\right\}$$

$$= \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3)\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{1}{2}\right)^{n-9} = \frac{1}{3}(n-1)(n-2)(n-3)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

すると，$x_{n+1}-x_n = \frac{1}{3}n(n-1)(n-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{3}(n-1)(n-2)(n-3)\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$= \frac{1}{3}(n-1)(n-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\{n-2(n-3)\}$$

$$= \frac{1}{3}(n-1)(n-2)(6-n)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$n \geqq 8$ のとき，$x_{n+1}-x_n < 0$ より，$x_n > x_{n+1}$ となり,

$$x_8 > x_9 > x_{10} > \cdots\cdots$$

$n \leqq 7$ のときは $x_n = 0$ から，x_n は $n = 8$ のとき最大となる。

［解 説］

典型問題の 1 つです。(2)では，x_n が複雑な式ではなかったので，階差数列を考えました。