1

解答解説のページへ

次の条件(a), (b)をともに満たす直角三角形を考える。ただし，斜辺の長さを p, その他の 2 辺の長さを $q,\ r$ とする。

(a)　$p,\ q,\ r$ は自然数で，そのうちの少なくとも 2 つは素数である。

(b)　$p+q+r=132$

(1)　$q,\ r$ のどちらかは偶数であることを示せ。

(2)　$p,\ q,\ r$ の組をすべて求めよ。

2

解答解説のページへ

座標平面上に 1 辺の長さが 2 の正三角形 ABC がある。ただし，△ABC の重心は原点の位置にあり，辺 BC は x 軸と平行である。また，頂点 A は y 軸上にあって y 座標は正であり，頂点 C の x 座標は正である。直線 $y=x$ に関して 3 点 A，B，C と対称な点を，それぞれ A′，B′，C′ とする。

(1)　C′ の座標を求めよ。

(2)　△ABC と△A′B′C′ が重なる部分の面積を求めよ。

3

解答解説のページへ

大きさがそれぞれ 5, 3, 1 の平面上のベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$に対して, $\vec{z}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ とおく。

(1) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$を動かすとき, $|\vec{z}|$の最大値と最小値を求めよ。

(2) $\vec{a}$を固定し, $\vec{a}\cdot\vec{z}=20$ を満たすように$\vec{b}$, $\vec{c}$を動かすとき, $|\vec{z}|$の最大値と最小値を求めよ。

4

解答解説のページへ

a, b を正の定数とする。関数 $y = x^3 - ax$ のグラフと，点$(0,\ 2b^3)$を通る直線はちょうど 2 点 P, Q を共有している。ただし, P の x 座標は負, Q の x 座標は正である。

(1)　直線 PQ の方程式を a と b で表せ。

(2)　P および Q の座標を a と b で表せ。

(3)　$\angle\mathrm{POQ} = 90^\circ$ となる b が存在するような a の値の範囲を求めよ。ただし, O は原点である。

5

解答解説のページへ

1, 2, 3, 4 が 1 つずつ記された 4 枚のカードがある。これらのカードから 1 枚を抜き出し元に戻すという試行を n 回繰り返す。抜き出した n 個の数の和を X_n とし，積を Y_n とする。

(1)　$X_n \leqq n+3$ となる確率を n で表せ。

(2)　Y_n が 8 で割り切れる確率を n で表せ。

1

問題のページへ

(1)　三平方の定理より，$p^2=q^2+r^2$ ………①

また，条件(b)より，$p+q+r=132$ ………②

②より $p=132-q-r$ として，①に代入すると，

$$(132-q-r)^2=(q+r)^2-2qr\,,\ 66\times132-132(q+r)=-qr$$

よって，qr は偶数となることより，q, r のどちらかは偶数である。

(2)　まず，q が偶数のときを考える。

(i)　$q=2$ のとき　①より，$p^2-r^2=4$，$(p+r)(p-r)=4$

②から $p+r=130$ より，$130(p-r)=4$ となる。

これを満たす自然数 p, r は存在しない。

(ii)　$q\neq2$ のとき　条件(a)より p, r はともに素数になる。

①より，$r^2=(p+q)(p-q)$

r は素数で，しかも①から $p>r$，$p>q$ なので，$p-q=1$ ……③となり，

$$r^2=p+q \text{ ………④}$$

条件(b)より，$p+q=132-r$ ………⑤

④⑤より，$r^2+r-132=0$，$(r-11)(r+12)=0$

したがって，$r=11$ となり，④より $p+q=121$ から，③と合わせて，

$$p=61\,,\ q=60$$

次に，r が偶数のときを考えると，同様にして，

$$q=11\,,\ p=61\,,\ r=60$$

以上より，$(p,\ q,\ r)=(61,\ 60,\ 11)$，$(61,\ 11,\ 60)$

［解 説］

(1)では，いろいろな解法が考えられますが，不要な文字 p を消去する方法を採りました。また，(2)では，素数が絡む問題でよく利用する「2 以外の素数は奇数」という事実を用いています。

2

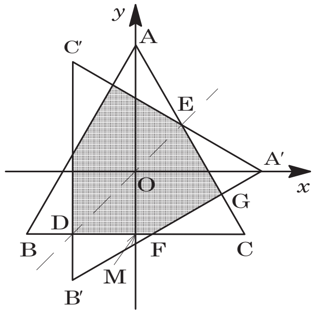
問題のページへ

(1)　BC の中点を M とすると，$CM=1$ となり，

$$AM=2\sin 60°=\sqrt{3}$$

$OM:OA=1:2$ から，$OM=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

よって，$C\left(1,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$となり，直線 $y=x$ に関して対称移動すると，$C'\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ 1\right)$となる。



(2)　BC と $B'C'$ は直線 $y=x$ に関して対称なので，その交点 D は $y=x$ 上にあり，$D\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$となる。

ここで，直線 AC は傾きが $\tan 120°=-\sqrt{3}$，点 $A\left(0,\ \dfrac{2}{3}\sqrt{3}\right)$から，その方程式は，

$$y=-\sqrt{3}x+\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

同様に, AC と $A'C'$ の交点 E も直線 $y=x$ 上にあり，その座標は，

$$x=-\sqrt{3}x+\frac{2}{3}\sqrt{3},\quad x=\frac{2\sqrt{3}}{3(1+\sqrt{3})}=\frac{3-\sqrt{3}}{3}$$

よって，$E\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{3-\sqrt{3}}{3}\right)$となり，

$$\triangle CDE=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$$

また，直線 $A'B'$ は傾きが $\tan 30°=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，点 $A'\left(\dfrac{2}{3}\sqrt{3},\ 0\right)$から，その方程式は，

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$$

すると，$A'B'$ と BC の交点 F は，$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(x-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\right)$，$x=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}-1$

そこで, AC と $A'B'$ は直交することより，

$$\triangle CFG=\frac{1}{2}\cdot CF\cos 60°\cdot CF\sin 60°=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{3}\sqrt{3}+1\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$$

以上より，求める図形は直線 $y=x$ に関して対称なので，その面積 S は，

$$S=2(\triangle CDE-\triangle CFG)=2\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}-\frac{2\sqrt{3}-3}{3}\right)=3-\sqrt{3}$$

［解 説］

頂点や交点の座標を求め，三角形の面積へとつなぎました。計算量はやや多めです。なお，回転に注目する方法もあります。

3

問題のページへ

(1) $|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{c}|=1$より，

$$|\vec{z}|=|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|\leqq|\vec{a}+\vec{b}|+|\vec{c}|\leqq|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|=9\cdots\cdots\cdots①$$

①において等号が成立するのは，左側では$\vec{a}+\vec{b}$と$\vec{c}$が同じ向きのとき，右側では$\vec{a}$と$\vec{b}$が同じ向きのときである。

よって，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$が同じ向きのとき，$|\vec{z}|$は最大値 9 をとる。

また，$||\vec{a}|-|\vec{b}||\leqq|\vec{a}+\vec{b}|\leqq|\vec{a}|+|\vec{b}|$より，$2\leqq|\vec{a}+\vec{b}|\leqq 8$となり，

$$|\vec{z}|=|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|\geqq||\vec{a}+\vec{b}|-|\vec{c}||\geqq 2-1=1\cdots\cdots\cdots②$$

②において等号が成立するのは，左側では$\vec{a}+\vec{b}$と$\vec{c}$が逆向きのとき，右側では$\vec{a}$と$\vec{b}$が逆向きのときである。

よって，$\vec{b}$，$\vec{c}$が$\vec{a}$と逆向きのとき，$|\vec{z}|$は最小値 1 をとる。

(2) 条件より，$\vec{a}\cdot\vec{z}=20$なので，$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=20$となり，

$$|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=20,\ \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=-5\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，③の条件のもとで，

$$|\vec{z}|^2=|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})+|\vec{b}+\vec{c}|^2$$
$$=25+2\times(-5)+|\vec{b}+\vec{c}|^2=15+|\vec{b}+\vec{c}|^2$$

(1)と同様に，$||\vec{b}|-|\vec{c}||\leqq|\vec{b}+\vec{c}|\leqq|\vec{b}|+|\vec{c}|$から，$2\leqq|\vec{b}+\vec{c}|\leqq 4\cdots\cdots\cdots④$

④の範囲の値は，すべて③を満たしており，$15+4\leqq|\vec{z}|^2\leqq 15+16$から，

$$\sqrt{19}\leqq|\vec{z}|\leqq\sqrt{31}$$

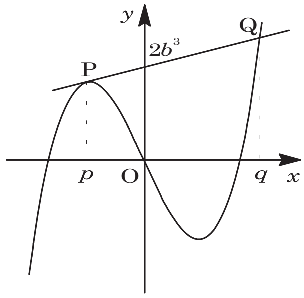
よって，$\vec{b}$，$\vec{c}$が同じ向きのとき，$|\vec{z}|$は最大値$\sqrt{31}$をとり，$\vec{b}$，$\vec{c}$が逆向きのとき，最小値$\sqrt{19}$をとる。

［解 説］

ベクトルの三角不等式の問題です。(1)で$|\vec{z}|=0$となる場合があれば，この値がもちろん最小値ですが，このようなケースはありませんでした。なお，(2)では，ベクトルの和$\vec{b}+\vec{c}$を変化するベクトルとしてとらえています。

4

問題のページへ



(1)　曲線 $y = x^3 - ax$ ……①上の点 P，Q の x 座標をそれぞれ p，q ($p < 0 < q$) とし，点 $(0,\ 2b^3)$ を通る直線を $y = mx + 2b^3$ ……②とおく。

また，条件より，点 P，Q の一方は①と②の接点，他方は交点である。

(i)　点 P が交点，点 Q が接点のとき

$x^3 - ax - (mx + 2b^3) = 0$ は解 $x = p$ と重解 $x = q$ をもつことより，

$$x^3 - ax - (mx + 2b^3) = (x - p)(x - q)^2$$

定数項を比べると，$-2b^3 = -pq^2$ となり，$b > 0$，$p < 0 < q$ に反する。

(ii)　点 P が接点，点 Q が交点のとき

$x^3 - ax - (mx + 2b^3) = 0$ は重解 $x = p$ と解 $x = q$ をもつことより，

$$x^3 - ax - (mx + 2b^3) = (x - p)^2(x - q)$$

係数を比べると，

$$0 = 2p + q \text{ ………③},\quad -a - m = p^2 + 2pq \text{ ………④},\quad -2b^3 = -p^2q \text{ ………⑤}$$

③から $q = -2p$ を④，⑤に代入すると，

$$m = -a + 3p^2 \text{ ………⑥},\quad p = -b \text{ ………⑦}$$

⑥⑦より $m = -a + 3b^2$ となり，直線 PQ の方程式は，②より，

$$y = (-a + 3b^2)x + 2b^3$$

(2)　①⑦より $\mathrm{P}(-b,\ -b^3 + ab)$，③から $q = 2b$ なので $\mathrm{Q}(2b,\ 8b^3 - 2ab)$ となる。

(3)　(2)より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (-b,\ -b^3 + ab)$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (2b,\ 8b^3 - 2ab)$ である。

条件から $\angle\mathrm{POQ} = 90^\circ$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 0$ となり，

$$-2b^2 + (-b^3 + ab)(8b^3 - 2ab) = 0$$

$b > 0$ を用いてまとめると，$4b^4 - 5ab^2 + a^2 + 1 = 0$

ここで，$t = b^2 > 0$ とおくと，$4t^2 - 5at + a^2 + 1 = 0$ ………⑧

すると，求める条件は，⑧が $t > 0$ の解をもつ a の範囲となる。

$a > 0$ から，$\dfrac{5a}{4} > 0$，$\dfrac{a^2 + 1}{4} > 0$ に注意すると，

$$D = 25a^2 - 16(a^2 + 1) = (3a + 4)(3a - 4) \geqq 0$$

よって，$a \geqq \dfrac{4}{3}$ である。

［解　説］

重解条件を利用して解きました。標準的で落とせない問題です。

5

問題のページへ

(1)　4 枚のカードから 1 枚を n 回抜き出す 4^n 通りの場合が同様に確からしい。

まず，n 個の数の和 $X_n \leqq n+3$ となるのは，1 を抜き出した回数が $n-3$ 回以上である。ただし，$n \geqq 3$ とする。

(i)　1 を n 回抜き出したとき　この確率は $\dfrac{1}{4^n}$ である。

(ii)　1 を $n-1$ 回抜き出したとき

残り 1 回は，2, 3, 4 のいずれかを抜き出した場合より，この確率は，

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_1 \times 3}{4^n} = \frac{3n}{4^n}$$

(iii) 1 を $n-2$ 回抜き出したとき

残り 2 回は，ともに 2 を抜き出したか，または 2 を 1 回，3 を 1 回抜き出した場合より，この確率は，

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_1 \times {}_{n-1}\mathrm{C}_1}{4^n} = \frac{n(n-1)+2n(n-1)}{2\cdot 4^n} = \frac{3n(n-1)}{2\cdot 4^n}$$

(iv) 1 を $n-3$ 回抜き出したとき

残り 3 回は，すべて 2 を抜き出した場合より，この確率は，

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_3}{4^n} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6\cdot 4^n}$$

(i)〜(iv)より，$X_n \leqq n+3$ となる確率は，$n \geqq 3$ のとき，

$$\frac{1}{4^n} + \frac{3n}{4^n} + \frac{3n(n-1)}{2\cdot 4^n} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6\cdot 4^n} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6\cdot 4^n} \cdots\cdots\cdots ①$$

なお，$n=1$ のとき，$X_1 \leqq 4$ となる確率は 1 である。そこで，①に $n=1$ をあてはめると，$\dfrac{2\cdot 3\cdot 4}{6\cdot 4} = 1$ となり成立する。

また，$n=2$ のとき，$X_2 \leqq 5$ となる場合は，$(1,\ 1)$，$(1,\ 2)$，$(1,\ 3)$，$(1,\ 4)$，$(2,\ 1)$，$(2,\ 2)$，$(2,\ 3)$，$(3,\ 1)$，$(3,\ 2)$，$(4,\ 1)$ の 10 通りより，その確率は $\dfrac{10}{4^2} = \dfrac{5}{8}$ である。そこで，①に $n=2$ をあてはめると，$\dfrac{3\cdot 4\cdot 5}{6\cdot 4^2} = \dfrac{5}{8}$ となり成立する。

以上より，$X_n \leqq n+3$ となる確率は，$\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6\cdot 4^n}$ である。

(2)　n 個の数の積 Y_n が 8 で割り切れない場合を考える。ただし，$n \geqq 2$ とする。

(i)　1 または 3 を n 回抜き出したとき　この確率は $\dfrac{2^n}{4^n}$ である。

(ii)　1 または 3 を $n-1$ 回抜き出したとき

残り 1 回は，2, 4 のいずれかを抜き出した場合より，この確率は，

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_1 \times 2^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_1 \times 2^{n-1}}{4^n} = \frac{n\cdot 2^n}{4^n}$$

(iii) 1または3を$n-2$回抜き出したとき

残り2回は，ともに2を抜き出した場合より，この確率は，

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_2\times 2^{n-2}}{4^n}=\frac{n(n-1)\cdot 2^{n-3}}{4^n}$$

(i)〜(iii)より，Y_nが8で割り切れない確率は, $n\geqq 2$のとき,

$$\frac{2^n}{4^n}+\frac{n\cdot 2^n}{4^n}+\frac{n(n-1)\cdot 2^{n-3}}{4^n}=\frac{(n^2+7n+8)\cdot 2^{n-3}}{4^n}=\frac{n^2+7n+8}{2^{n+3}}\cdots\cdots\cdots②$$

なお，$n=1$のとき，Y_1が8で割り切れない確率は1である。そこで，②に$n=1$をあてはめると，$\dfrac{16}{2^4}=1$となり成立する。

以上より，Y_nが8で割り切れない確率は$\dfrac{n^2+7n+8}{2^{n+3}}$であるので，$Y_n$が8で割り切れる確率は，$1-\dfrac{n^2+7n+8}{2^{n+3}}$となる。

［解　説］

$n=1$などのチェックは必要ですが，正確に場合分けをすることがすべてと言っても過言ではありません。