1

解答解説のページへ

m を整数とし，$f(x)=x^3+8x^2+mx+60$ とする。

(1)　整数 a と，0 ではない整数 b で，$f(a+bi)=0$ を満たすものが存在するような m をすべて求めよ。ただし，i は虚数単位である。

(2)　(1)で求めたすべての m に対して，方程式 $f(x)=0$ を解け。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$を

$$a_1 = 2\,,\ \ a_{n+1} = 4a_n$$
$$b_1 = 3\,,\ \ b_{n+1} = b_n + 2a_n$$
$$c_1 = 4\,,\ \ c_{n+1} = \frac{c_n}{4} + a_n + b_n$$

と順に定める。放物線$y = a_n x^2 + 2b_n x + c_n$を$H_n$とする。

(1)　H_nはx軸と 2 点で交わることを示せ。

(2)　H_nとx軸の交点をP_n，Q_nとする。$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k$ を求めよ。

3

解答解説のページへ

放物線 $y = ax^2 + bx\ (a>0)$ を C とする。C 上に異なる 2 点 P, Q をとり，その x 座標をそれぞれ $p,\ q\ (0<p<q)$ とする。

(1) 線分 OQ と C で囲まれた部分の面積が，△OPQ の面積の $\dfrac{3}{2}$ 倍であるとき，p と q の関係を求めよ。ただし，O は原点を表す。

(2) Q を固定して P を動かす。△OPQ の面積が最大となるときの p を q で表せ。また，そのときの△OPQ の面積と，線分 OQ と C で囲まれた部分の面積との比を求めよ。

4

解答解説のページへ

a を定数とし，$f(x)=x^3-3ax^2+a$ とする。$x \leqq 2$ の範囲で $f(x)$ の最大値が 105 となるような a をすべて求めよ。

5

解答解説のページへ

1 が書かれたカードが 1 枚, 2 が書かれたカードが 1 枚, …, n が書かれたカードが 1 枚の全部で n 枚のカードからなる組がある。この組から 1 枚を抜き出して元に戻す操作を 3 回行う。抜き出したカードに書かれた数を a, b, c とするとき, 得点 X を次の規則(i), (ii)に従って定める。

(i)　a, b, c がすべて異なるとき, X は a, b, c のうちの最大でも最小でもない値とする。

(ii)　a, b, c のうちに重複しているものがあるとき, X はその重複した値とする。

$1 \leqq k \leqq n$ を満たす k に対して, $X = k$ となる確率を p_k とする。

(1)　p_k を n と k で表せ。

(2)　p_k が最大となる k を n で表せ。

1

問題のページへ

(1)　$f(x)=x^3+8x^2+mx+60$ に対して，$f(a+bi)=0$ より，

$$(a+bi)^3+8(a+bi)^2+m(a+bi)+60=0$$

$$(a^3-3ab^2+8a^2-8b^2+ma+60)+(3a^2b-b^3+16ab+mb)i=0$$

$a,\ b,\ m$ は整数より，

$$a^3-3ab^2+8a^2-8b^2+ma+60=0\cdots\cdots\text{①}$$

$$3a^2b-b^3+16ab+mb=0\cdots\cdots\text{②}$$

$b\neq 0$ なので，②より，$m=-3a^2+b^2-16a\cdots\cdots$③となり，①に代入すると，

$$a^3-3ab^2+8a^2-8b^2+a(-3a^2+b^2-16a)+60=0$$

$$a^3+4a^2+ab^2+4b^2=30,\ (a+4)(a^2+b^2)=30$$

すると，$a+4$，a^2+b^2 は 30 の約数となり，また $1\leqq a^2+b^2\leqq 30$ から $|a|\leqq 5$ であり，これより $1\leqq a+4\leqq 9$ となる。

(i)　$(a+4,\ a^2+b^2)=(1,\ 30)$ のとき

$a=-3$ となるが，$b^2=21$ となり，b が整数であることに反する。

(ii)　$(a+4,\ a^2+b^2)=(2,\ 15)$ のとき

$a=-2$ となるが，$b^2=11$ となり，b が整数であることに反する。

(iii)　$(a+4,\ a^2+b^2)=(3,\ 10)$ のとき

$a=-1$，$b^2=9$ となり，$b=\pm 3$ である。このとき，③より $m=22$ となる。

(iv)　$(a+4,\ a^2+b^2)=(5,\ 6)$ のとき

$a=1$ となるが，$b^2=5$ となり，b が整数であることに反する。

(v)　$(a+4,\ a^2+b^2)=(6,\ 5)$ のとき

$a=2$，$b^2=1$ となり，$b=\pm 1$ である。このとき，③より $m=-43$ となる。

(i)～(v)より，$m=22$ または $m=-43$

(2)　$m=22$ のとき，$x=-1\pm 3i$ が解になり，

$$f(x)=x^3+8x^2+22x+60=(x+6)(x^2+2x+10)$$

よって，$f(x)=0$ の解は，$x=-6,\ -1\pm 3i$

また，$m=-43$ のとき，$x=2\pm i$ が解になり，

$$f(x)=x^3+8x^2-43x+60=(x+12)(x^2-4x+5)$$

よって，$f(x)=0$ の解は，$x=-12,\ 2\pm i$

［解 説］

共役な虚数解を設定して，解と係数の関係を用いる方法もありますが，ここでは計算だけで押し通しました。

© 電送数学舎 2007

2

問題のページへ

(1) 放物線$H_n : y=a_nx^2+2b_nx+c_n$とx軸との共有点は,

$$a_nx^2+2b_nx+c_n=0\cdots\cdots\cdots①$$

①の判別式をD_nとし，さらに$\dfrac{D_n}{4}=D'_n$とおく。

条件から，$a_{n+1}=4a_n\cdots\cdots②$，$b_{n+1}=b_n+2a_n\cdots\cdots③$，$c_{n+1}=\dfrac{c_n}{4}+a_n+b_n\cdots\cdots④$

ここで，②③④より，

$$D'_n=b_n{}^2-a_nc_n=(b_{n-1}+2a_{n-1})^2-4a_{n-1}\left(\frac{c_{n-1}}{4}+a_{n-1}+b_{n-1}\right)$$
$$=b_{n-1}{}^2+4a_{n-1}b_{n-1}+4a_{n-1}{}^2-a_{n-1}c_{n-1}-4a_{n-1}{}^2-4a_{n-1}b_{n-1}$$
$$=b_{n-1}{}^2-a_{n-1}c_{n-1}=D'_{n-1}$$

すると，$a_1=2$，$b_1=3$，$c_1=4$から，

$$D'_n=D'_1=b_1{}^2-a_1c_1=3^2-2\times4=1>0$$

よって，H_nはx軸と2点で交わる。

(2) ①の解は，$x=\dfrac{-b_n\pm\sqrt{D'_n}}{a_n}=\dfrac{-b_n\pm1}{a_n}$なので，

$$\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n=\frac{-b_n+1}{a_n}-\frac{-b_n-1}{a_n}=\frac{2}{a_n}$$

②より，$a_n=2\cdot4^{n-1}$となり，

$$\sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2\cdot4^{k-1}}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}=\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$$

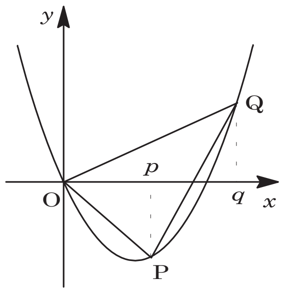
［解 説］

まず，一般項a_n，b_nは簡単に求まりますが，c_nを求めるには，計算に時間がかかりそうです。そこで，方向転換をしたのが上記の解です。

© 電送数学舎 2007

3

問題のページへ



(1)　線分 OQ と放物線 $C: y = ax^2 + bx$ で囲まれた部分の面積を S とおく。また，OQ の傾きを m とすると，OQ と C との交点が $x = 0,\ q$ より，

$$S = \int_0^q (mx - ax^2 - bx)\,dx = \int_0^q -ax(x-q)\,dx$$
$$= \frac{a}{6}q^3$$

ここで，$\mathrm{P}(p,\ ap^2 + bp)$，$\mathrm{Q}(q,\ aq^2 + bq)$ より，

$$\triangle\mathrm{OPQ} = \frac{1}{2}\left| p(aq^2 + bq) - q(ap^2 + bp) \right|$$
$$= \frac{1}{2}\left| apq(q-p) \right| = \frac{1}{2}apq(q-p)$$

条件より，$S = \frac{3}{2}\triangle\mathrm{OPQ}$ なので，$\frac{a}{6}q^3 = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}apq(q-p)$

$$2q^2 - 9pq + 9p^2 = 0,\ (2q-3p)(q-3p) = 0$$

よって，$q = \frac{3}{2}p$ または $q = 3p$

(2)　(1)より，$\triangle\mathrm{OPQ} = \frac{1}{2}aq(qp - p^2) = -\frac{1}{2}aq\left(p - \frac{q}{2}\right)^2 + \frac{1}{8}aq^3$

よって，$p = \frac{q}{2}$ のとき，$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積は最大となり，その値は $\frac{1}{8}aq^3$ である。

このとき，$\triangle\mathrm{OPQ} : S = \frac{1}{8}aq^3 : \frac{1}{6}aq^3 = 3 : 4$ となる。

［解 説］

b の符号にかかわらず，放物線は下に凸なので，場合分けは必要ありませんでした。(2)では，(1)を誘導とし，平方完成を用いて最大値を求めました。図形的に，P における接線が OQ に平行な場合として，結論を導くこともできます。

© 電送数学舎 2007

4

問題のページへ

$f(x)=x^3-3ax^2+a$ に対して，$f'(x)=3x^2-6ax=3x(x-2a)$ となり，

$$f(0)=a,\ f(2a)=-4a^3+a,\ f(2)=8-11a$$

(i)　$a\leqq 0$ のとき

$f(x)$ の増減は右表のようになり，$x\leqq 2$ における最大値は，$f(2a)$ または $f(2)$ であり，

x	$\cdots$	$2a$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$$f(2a)-f(2)=-4a^3+a-8+11a$$
$$=-4(a-1)^2(a+2)$$

(i-i)　$a<-2$ のとき

最大値は $f(2a)$ となり，条件より，$-4a^3+a=105$

$$4a^3-a+105=0,\ (a+3)(4a^2-12a+35)=0$$

$a<-2$ より，$a=-3$

(i-ii)　$-2\leqq a\leqq 0$ のとき

最大値は $f(2)$ となり，条件より，$8-11a=105$

すると，$a=-\dfrac{97}{11}$ となるが，$-2\leqq a\leqq 0$ を満たさない。

(ii)　$a>0$ のとき

$f(x)$ の増減は右表のようになり，$x\leqq 2$ における最大値は，$f(0)$ または $f(2)$ であり，

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$$f(0)-f(2)=a-8+11a=12a-8$$

(ii-i)　$0<a<\dfrac{2}{3}$ のとき

最大値は $f(2)$ となり，条件より，$8-11a=105$

すると，$a=-\dfrac{97}{11}$ となるが，$0<a<\dfrac{2}{3}$ を満たさない。

(ii-ii)　$a\geqq\dfrac{2}{3}$ のとき

最大値は $f(0)$ となり，条件より $a=105$ である。この値は $a\geqq\dfrac{2}{3}$ を満たす。

(i)(ii)より，$a=-3,\ 105$

[解 説]

3 次関数の最大・最小という典型的な問題です。場合分けを丁寧に行えば，完答できます。

© 電送数学舎 2007

5

問題のページへ

(1)　n 枚のカードから 1 枚を元に戻して 3 回抜き出す n^3 通りが同様に確からしい。

(i)　a, b, c がすべて異なるとき

$X=k$ となるのは，k のカードを 1 回，k より小さいカードを 1 回，k より大きいカードを 1 回抜き出す場合であり，その抜き出す順序も考えて，この確率は，

$$\frac{1\cdot(k-1)(n-k)}{n^3}\times 3!=\frac{6(k-1)(n-k)}{n^3}$$

(ii)　a, b, c のうち 2 個だけが等しいとき

$X=k$ となるのは，k のカードを 2 回，k 以外のカードを 1 回抜き出す場合であり，その抜き出す順序も考えて，この確率は，

$$\frac{1^2\cdot(n-1)}{n^3}\times 3=\frac{3(n-1)}{n^3}$$

(iii) a, b, c がすべて等しいとき

$X=k$ となるのは，k のカードを 3 回抜き出す場合であり，この確率は，

$$\frac{1^3}{n^3}=\frac{1}{n^3}$$

(i)〜(iii)より，$X=k$ となる確率を p_k は，

$$p_k=\frac{6(k-1)(n-k)}{n^3}+\frac{3(n-1)}{n^3}+\frac{1}{n^3}=\frac{1}{n^3}\left\{-6k^2+6(n+1)k-3n-2\right\}$$

(2)　(1)より，$p_k=\dfrac{1}{n^3}\left\{-6\left(k-\dfrac{n+1}{2}\right)^2+\dfrac{3(n+1)^2}{2}-3n-2\right\}$

よって，n が奇数のとき $k=\dfrac{n+1}{2}$ のとき p_k は最大となる。また，n が偶数のとき $k=\dfrac{n}{2}$，$\dfrac{n+2}{2}$ のとき p_k は最大となる。

［解 説］

(2)は第 3 問と同じく，2 次関数の最大値を求めるものでした。それも，なぜか付録のような扱いになっています。

© 電送数学舎 2007