1

解答解説のページへ

k を正の整数とする。$5n^2-2kn+1<0$ を満たす整数 n が，ちょうど 1 個であるような k をすべて求めよ。

2

解答解説のページへ

3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ は異なる 3 つの解 p, q, r をもつ。さらに，$2p^2-1$，$2q-1$，$2r-1$ も同じ方程式の異なる 3 つの解である。a, b, c, p, q, r の組をすべて求めよ。

3

解答解説のページへ

a を正の実数とする。点$(x,\ y)$が，不等式$x^2 \leqq y \leqq x$の定める領域を動くとき，つねに$\dfrac{1}{2} \leqq (x-a)^2 + y \leqq 2$となる。$a$の値の範囲を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

正四面体 OABC の 1 辺の長さを 1 とする。辺 OA を $2:1$ に内分する点を P, 辺 OB を $1:2$ に内分する点を Q とし, $0<t<1$ を満たす t に対して, 辺 OC を $t:1-t$ に内分する点を R とする。

(1) PQ の長さを求めよ。

(2) $\triangle$PQR の面積が最小となるときの t の値を求めよ。

5

解答解説のページへ

n を 3 以上の整数とする。$2n$ 枚のカードがあり，そのうち赤いカードの枚数は 6，白いカードの枚数は $2n-6$ である。これら $2n$ 枚のカードを，箱 A と箱 B に n 枚ずつ無作為に入れる。2 つの箱の少なくとも一方に赤いカードがちょうど k 枚入っている確率を p_k とする。

(1)　p_2 を n の式で表せ。さらに，p_2 を最大にする n をすべて求めよ。

(2)　$p_1+p_2<p_0+p_3$ を満たす n をすべて求めよ。

1

問題のページへ

与えられた不等式$5n^2-2kn+1<0$を変形して，$\dfrac{5}{2}n^2+\dfrac{1}{2}<kn$ ………①

ここで, $k>0$なので，①から$n>0$である。

さて，①を満たす正の整数nが1個である条件は，$y=\dfrac{5}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$ ……②のグラフが, $y=kx$ ……③のグラフの下方にある$x>0$の範囲に，整数が1個のみ存在することを意味する。

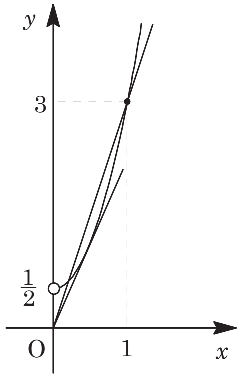
さて，②と③のグラフが接するのは，$5x^2-2kx+1=0$から,

$$D/4=k^2-5=0,\ k=\sqrt{5}$$

このとき，$x=\dfrac{k}{5}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}<1$

これより，①を満たす整数が1個となるnの値は，$n=1$のみである。

そこで，右図から，③が点$(1,\ 3)$を通るとき$k=3$，また点$\left(2,\ \dfrac{21}{2}\right)$を通るとき$k=\dfrac{21}{4}$である。



よって，条件を満たすkの範囲は$3<k\leqq\dfrac{21}{4}$となり，求める整数kは，$k=4,\ 5$である。

［解 説］

頻出タイプの問題です。放物線と直線の位置関係で，不等式の解をとらえています。

2　　問題のページへ

3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ ……①の異なる 3 つの解が p, q, r より，

$$a=-p-q-r,\ b=pq+qr+rp,\ c=-pqr\ \cdots\cdots\text{②}$$

また，$2p^2-1$，$2q-1$，$2r-1$ も①の異なる 3 つの解であることより，

(i)　$2p^2-1=p$ のとき

(i-i)　$2q-1=q$，$2r-1=r$ のとき　$q=r=1$ となり不適。

(i-ii)　$2q-1=r$，$2r-1=q$ のとき　$q=r=1$ となり不適。

(ii)　$2p^2-1=q$ のとき

(ii-i)　$2q-1=p$，$2r-1=r$ のとき

まず，$r=1$ となり，$2p^2-1=q$ を $2q-1=p$ に代入して，$2(2p^2-1)-1=p$

$$4p^2-p-3=0,\ (4p+3)(p-1)=0$$

$p\neq r=1$ から $p=-\frac{3}{4}$，$q=\frac{1}{8}$ となり，条件に適する。

このとき，②より，$a=-\frac{3}{8}$，$b=-\frac{23}{32}$，$c=\frac{3}{32}$

(ii-ii)　$2q-1=r$，$2r-1=p$ のとき

まず，$2p^2-1=q$ を $2q-1=r$ に代入して，$2(2p^2-1)-1=r$，$4p^2-r-3=0$

さらに，$2r-1=p$ を代入すると，$4(2r-1)^2-r-3=0$

$$16r^2-17r+1=0,\ (16r-1)(r-1)=0$$

$r=1$ のときは，$p=1$ となり不適。

$r=\frac{1}{16}$ のときは，$p=-\frac{7}{8}$，$q=\frac{17}{32}$ であり，条件に適する。

このとき，②より，$a=\frac{9}{32}$，$b=-\frac{249}{512}$，$c=\frac{119}{4096}$

(iii)　$2p^2-1=r$ のとき

(iii-i)　$2q-1=q$，$2r-1=p$ のとき

(ii-i)と同様にして，$p=-\frac{3}{4}$，$q=1$，$r=\frac{1}{8}$，$a=-\frac{3}{8}$，$b=-\frac{23}{32}$，$c=\frac{3}{32}$

(iii-ii)　$2q-1=p$，$2r-1=q$ のとき

(ii-ii)と同様にして，$p=-\frac{7}{8}$，$q=\frac{1}{16}$，$r=\frac{17}{32}$，$a=\frac{9}{32}$，$b=-\frac{249}{512}$，$c=\frac{119}{4096}$

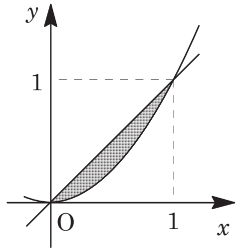
[解 説]

まず，6 通りの場合を考え，連立方程式を解く問題と見極めるのがポイントです。ただ，その後も，数値計算の量は半端ではなく，多量のエネルギーと時間を費やしてしまいます。

3

問題のページへ

不等式 $x^2 \leqq y \leqq x$ ……①の定める領域は右図の網点部である。



さて，$\frac{1}{2} \leqq (x-a)^2 + y \leqq 2$ より，

$$-(x-a)^2 + \frac{1}{2} \leqq y \leqq -(x-a)^2 + 2 \text{………②}$$

すると，②で表される領域は，$y = -(x-a)^2 + \frac{1}{2}$ ……③と $y = -(x-a)^2 + 2$ ……④のグラフに挟まれた領域である。

ここで，③と $y = x^2$ を連立して，

$$x^2 = -(x-a)^2 + \frac{1}{2},\ 2x^2 - 2ax + a^2 - \frac{1}{2} = 0$$

すると，③のグラフが $y = x^2$ に接するのは，

$$D/4 = a^2 - 2\left(a^2 - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$a > 0$ から，$a = 1$ となる。

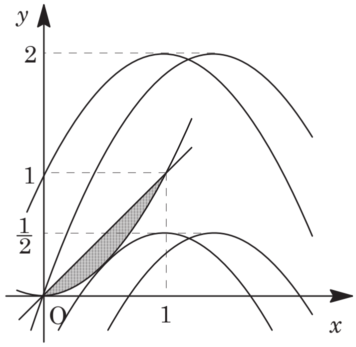
また，④のグラフが原点を通るのは，

$$0 = -a^2 + 2$$

$a > 0$ から，$a = \sqrt{2}$ となる。

よって，領域①が領域②に含まれる a の値の範囲は，

$$1 \leqq a \leqq \sqrt{2}$$

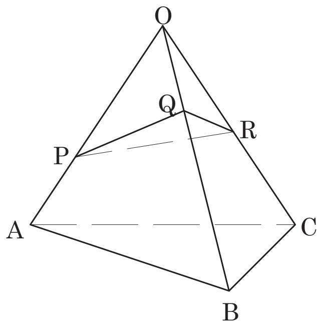


［解 説］

第 1 問と同じく，図を見ながら必要な計算をしていきます。ただ，2 つの放物線の頂点の y 座標はそれぞれ固定されており，しかも x 座標は等しくなっています。このため，a の値の変化に伴う 2 つの放物線の動きは，複雑ではありません。

4

問題のページへ



(1)　$\mathrm{OP}=\dfrac{2}{3}$，$\mathrm{OQ}=\dfrac{1}{3}$ より，$\triangle\mathrm{OPQ}$ に余弦定理を適用して，

$$\mathrm{PQ}^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2-2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cos 60^\circ=\frac{1}{3}$$

よって，$\mathrm{PQ}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(2)　まず，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$ であり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=1\cdot1\cdot\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=t\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ から，

$$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2=\left|t\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2=t^2-\frac{2}{3}t+\frac{4}{9}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)\cdot\left(t\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=\frac{1}{6}t-\frac{1}{9}-\frac{1}{3}t+\frac{4}{9}=-\frac{1}{6}t+\frac{1}{3}$$

また, (1)より，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=\dfrac{1}{3}$ から，$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積 S は,

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}\left(t^2-\frac{2}{3}t+\frac{4}{9}\right)-\left(-\frac{1}{6}t+\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{36}t^2-\frac{1}{9}t+\frac{1}{27}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{36}\left(t-\frac{2}{11}\right)^2+\left(\frac{1}{27}-\frac{1}{99}\right)}$$

よって，$t=\dfrac{2}{11}$ のとき，$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積は最小となる。

［解 説］

正四面体を題材にした頻出のもので，参考書の例題に掲載されそうな問題です。

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1) 箱Aに(赤, 白)$=(2,\ n-2)$枚, 箱Bに(赤, 白)$=(4,\ n-4)$枚の場合と, 箱Bに(赤, 白)$=(2,\ n-2)$枚, 箱Aに(赤, 白)$=(4,\ n-4)$枚の場合は, 確率が同じなので, 2つの箱の少なくとも一方に赤が2枚入っている確率 p_2 は, $n\geqq 4$ のとき,

$$p_2=\frac{{}_6C_2\times{}_{2n-6}C_{n-2}\times 2}{{}_{2n}C_n}=\frac{30\cdot\dfrac{(2n-6)!}{(n-2)!(n-4)!}}{\dfrac{(2n)!}{n!n!}}$$

$$=\frac{30n(n-1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)(2n-5)}$$

$$=\frac{15n(n-1)(n-3)}{4(2n-1)(2n-3)(2n-5)}\cdots\cdots\cdots(*)$$

なお, $n=3$ のときは $p_2=0$ となり, このときも$(*)$は成立する。

さて, $n\geqq 4$ のとき, $f(n)=\dfrac{15n(n-1)(n-3)}{4(2n-1)(2n-3)(2n-5)}$ とおくと,

$$\frac{f(n+1)}{f(n)}=\frac{\dfrac{15(n+1)n(n-2)}{4(2n+1)(2n-1)(2n-3)}}{\dfrac{15n(n-1)(n-3)}{4(2n-1)(2n-3)(2n-5)}}=\frac{(n+1)(n-2)(2n-5)}{(n-1)(n-3)(2n+1)}$$

ここで, $\dfrac{f(n+1)}{f(n)}>1$ すなわち $f(n)<f(n+1)$ を満たす n の範囲は,

$$(n+1)(n-2)(2n-5)>(n-1)(n-3)(2n+1)$$

よって, $n+10>2n+3$ から, $n<7$ となる。

すると, $n<7$ のとき $f(n)<f(n+1)$, $n=7$ のとき $f(n)=f(n+1)$, $n>7$ のとき $f(n)>f(n+1)$ より,

$$f(4)<f(5)<f(6)<f(7)=f(8)>f(9)>f(10)\cdots\cdots$$

以上より, p_2 を最大にする n は, $n=7,\ 8$ である。

(2) (1)から, $p_2=\dfrac{30\times{}_{2n-6}C_{n-2}}{{}_{2n}C_n}$ である。

(i) $n\geqq 6$ のとき

$$p_0=\frac{{}_{2n-6}C_n\times 2}{{}_{2n}C_n},\quad p_1=\frac{{}_6C_1\times{}_{2n-6}C_{n-1}\times 2}{{}_{2n}C_n},\quad p_3=\frac{{}_6C_3\times{}_{2n-6}C_{n-3}}{{}_{2n}C_n}$$

ここで, $p_1+p_2<p_0+p_3$ より,

$$12\times{}_{2n-6}C_{n-1}+30\times{}_{2n-6}C_{n-2}<2\times{}_{2n-6}C_n+20\times{}_{2n-6}C_{n-3}$$

$$\frac{12}{(n-1)!(n-5)!}+\frac{30}{(n-2)!(n-4)!}<\frac{2}{n!(n-6)!}+\frac{20}{(n-3)!(n-3)!}$$

まとめると, $n^3-6n^2+5n+6<0$ となり, $(n-2)(n^2-4n-3)<0$ から,

$$n<2-\sqrt{7},\ 2<n<2+\sqrt{7}$$

すると，$2+\sqrt{7}<5$ から，適する n は存在しない。

(ii)　$n=5$ のとき

$$p_1+p_2=\frac{12\times{}_4\mathrm{C}_4}{{}_{10}\mathrm{C}_5}+\frac{30\times{}_4\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_5}=\frac{132}{{}_{10}\mathrm{C}_5},\quad p_0+p_3=0+\frac{20\times{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_5}=\frac{120}{{}_{10}\mathrm{C}_5}$$

よって，$p_1+p_2<p_0+p_3$ は成立しない。

(iii)　$n=4$ のとき

$$p_1+p_2=0+\frac{30\times{}_2\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_4}=\frac{30}{{}_8\mathrm{C}_4},\quad p_0+p_3=0+\frac{20\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_4}=\frac{40}{{}_8\mathrm{C}_4}$$

よって，$p_1+p_2<p_0+p_3$ は成立する。

(iv)　$n=3$ のとき

$$p_0=p_1=p_2=0,\quad p_3=1$$

よって，$p_1+p_2<p_0+p_3$ は成立する。

(i)～(iv)より，$p_1+p_2<p_0+p_3$ を満たす n は，$n=3$，4 である。

［解 説］

確率の標準的な計算問題ですが，第 2 問と同じく，多量の計算が必要です。(2)の記述では，式変形のプロセスをかなり省略しています。