**1**　解答解説のページへ

実数 $p,\ q,\ r$ に対して，3 次多項式 $f(x)$ を $f(x)=x^3+px^2+qx+r$ と定める。実数 $a,\ c$, および 0 でない実数 $b$ に対して，$a+bi$ と $c$ はいずれも方程式 $f(x)=0$ の解であるとする。ただし, $i$ は虚数単位を表す。

(1)　$y=f(x)$ のグラフにおいて，点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾きを $s(a)$ とし，点 $(c,\ f(c))$ における接線の傾きを $s(c)$ とする。$a\neq c$ のとき，$s(a)$ と $s(c)$ の大小を比較せよ。

(2)　さらに, $a,\ c$ は整数であり, $b$ は 0 でない整数であるとする。次を証明せよ。

(i)　$p,\ q,\ r$ はすべて整数である。

(ii)　$p$ が 2 の倍数であり, $q$ が 4 の倍数であるならば, $a,\ b,\ c$ はすべて 2 の倍数である。

2

解答解説のページへ

$a$ を実数とする。傾きが $m$ である 2 つの直線が，曲線 $y = x^3 - 3ax^2$ とそれぞれ点 A, 点 B で接している。

(1) 線分 AB の中点を C とすると, C は曲線 $y = x^3 - 3ax^2$ 上にあることを示せ。

(2) 直線 AB の方程式が $y = -x - 1$ であるとき, $a$, $m$ の値を求めよ。

**3**

解答解説のページへ

原点を O とする $xyz$ 空間内で, $x$ 軸上の点 A, $xy$ 平面上の点 B, $z$ 軸上の点 C を次を満たすように定める。

$$\angle\mathrm{OAC} = \angle\mathrm{OBC} = \theta,\ \ \angle\mathrm{AOB} = 2\theta,\ \ \mathrm{OC} = 3$$

ただし, A の $x$ 座標, B の $y$ 座標, C の $z$ 座標はいずれも正であるとする。さらに, $\triangle\mathrm{ABC}$ 内の点のうち, O からの距離が最小の点を H とする。また, $t = \tan\theta$ とおく。

(1)　線分 OH の長さを $t$ の式で表せ。

(2)　H の $z$ 座標を $t$ の式で表せ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

0 以上の整数 $a_1$，$a_2$ が与えられたとき，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$$

により定める。

(1)　$a_1 = 1$，$a_2 = 2$ のとき，$a_{2010}$ を 10 で割った余りを求めよ。

(2)　$a_2 = 3a_1$ のとき，$a_{n+4} - a_n$ は 10 の倍数であることを示せ。

**5**

解答解説のページへ

$n$ を 3 以上の自然数とする。サイコロを $n$ 回投げ，出た目の数をそれぞれ順に $X_1$，$X_2$，…，$X_n$ とする。$i=2,\ 3,\ \cdots,\ n$ に対して $X_i = X_{i-1}$ となる事象を $A_i$ とする。

(1)　$A_2$，$A_3$，…，$A_n$ のうち少なくとも 1 つが起こる確率 $p_n$ を求めよ。

(2)　$A_2$，$A_3$，…，$A_n$ のうち少なくとも 2 つが起こる確率 $q_n$ を求めよ。

**1**

問題のページへ

(1)　$f(x)=x^3+px^2+qx+r$（$p,\ q,\ r$ は実数）に対して，$a+bi$, $c$（$a,\ c$ は実数, $b$ は0でない実数）が $f(x)=0$ の解であることから，$a-bi$ も解となり，

$$(a+bi)+(a-bi)+c=-p\text{，}\ p=-2a-c\cdots\cdots\cdots①$$

$$(a+bi)(a-bi)+(a-bi)c+c(a+bi)=q\text{，}\ q=a^2+b^2+2ac\cdots\cdots\cdots②$$

$$(a+bi)(a-bi)c=-r\text{，}\ r=-c(a^2+b^2)\cdots\cdots\cdots③$$

さて，点 $(a,\ f(a))$，$(c,\ f(c))$ における接線の傾きが，それぞれ $s(a)$，$s(c)$ なので，$f'(x)=3x^2+2px+q$ から，

$$s(a)-s(c)=f'(a)-f'(c)=3(a^2-c^2)+2p(a-c)=(a-c)(3a+3c+2p)$$

①を代入して，$s(a)-s(c)=(a-c)(3a+3a-4a-2c)=-(a-c)^2$

$a\neq c$ のとき，$s(a)-s(c)<0$ より，$s(a)<s(c)$

(2)　(i)　$a,\ b,\ c$ が整数のとき，①②③より, $p,\ q,\ r$ もすべて整数である。

(ii)　$p$ が 2 の倍数のとき，①から $c=-2a-p$ となるので, $c$ は 2 の倍数である。

さらに, $q$ が 4 の倍数のとき，②から $a^2+b^2=q-2ac$ となるので，$a^2+b^2$ は 4 の倍数である。

さて, $a$ が 2 の倍数のとき $a^2$ を 4 で割った余りは 0, $a$ が 2 の倍数でないとき $a^2$ を 4 で割った余りは 1 となる。

そこで，$a^2$，$b^2$ とその和を 4 で割った余りをまとめると，右表のようになる。

| $a^2$ \ $b^2$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 2 |

すると，$a^2+b^2$ は 4 の倍数であるのは，$a^2$，$b^2$ がともに 4 の倍数, すなわち $a$ と $b$ はいずれも 2 の倍数である。

以上より, $a,\ b,\ c$ はすべて 2 の倍数である。

## ［解 説］

計算量を考えると，解を $f(x)=0$ に代入して条件を求めるというのは後回しです。その代わりに, 解と係数の関係を利用しています。

**2**

問題のページへ

(1) 曲線 $y=x^3-3ax^2$ ……①上の点 $\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha^3-3a\alpha^2)$, $\mathrm{B}(\beta,\ \beta^3-3a\beta^2)$ とおく。

すると, $y'=3x^2-6ax$ から,

$$m=3\alpha^2-6a\alpha\ \cdots\cdots\cdots②,\quad m=3\beta^2-6a\beta\ \cdots\cdots\cdots③$$

②③より, $3(\alpha^2-\beta^2)-6a(\alpha-\beta)=0$ となり, $\alpha\neq\beta$ から, $\alpha+\beta=2a$ ………④

さて, 線分 AB の中点 C は, $\mathrm{C}\Big(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \dfrac{\alpha^3+\beta^3-3a(\alpha^2+\beta^2)}{2}\Big)$から, ④より,

$$\alpha^3+\beta^3-3a(\alpha^2+\beta^2)=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)-3a\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}$$
$$=8a^3-6a\alpha\beta-12a^3+6a\alpha\beta=-4a^3$$

よって, $\mathrm{C}(a,\ -2a^3)$ となり, 点 C は曲線 $y=x^3-3ax^2$ 上にある。

(2) 条件より, 点 C が直線 $y=-x-1$ ……⑤上にあるので, $-2a^3=-a-1$ となり,

$$2a^3-a-1=0,\ (a-1)(2a^2+2a+1)=0$$

$a$ は実数より, $a=1$

このとき, ①は $y=x^3-3x^2$ となり, ⑤との交点は,

$$x^3-3x^2=-x-1,\ x^3-3x^2+x+1=0,\ (x-1)(x^2-2x-1)=0$$

よって, $x=1,\ 1\pm\sqrt{2}$ となる。

これより, A, B の $x$ 座標は $1\pm\sqrt{2}$ となるので, ②③より, 複号同順で,

$$m=3(1\pm\sqrt{2})^2-6(1\pm\sqrt{2})=3$$

［解 説］

3 次曲線が点対称であることを題材とした問題です。

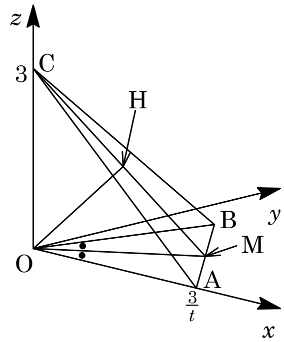
**3**

問題のページへ

(1)　条件から，$OC=3$ より，$C(0,\ 0,\ 3)$

さらに，$\angle OAC=\angle OBC=\theta$，$\angle AOB=2\theta$ であり，$0<2\theta<\pi\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$なので，$OA=OB=\dfrac{3}{\tan\theta}$ となり，

$$A\left(\frac{3}{\tan\theta},\ 0,\ 0\right),\ B\left(\frac{3\cos 2\theta}{\tan\theta},\ \frac{3\sin 2\theta}{\tan\theta},\ 0\right)$$




ここで，線分 AB の中点を M とおくと，$CM\perp AB$，$OM\perp AB$から，$AB\perp$(平面OMC)である。

そこで，O から CM に垂線 $l$ を引いたとき，平面 OMC 上の垂線 $l$ は，$l\perp$(平面ABC)となる。

すなわち，△ABC 内の点で，O からの距離が最小の点 H は，垂線 $l$ の足である。

さて，$t=\tan\theta$ より，半角の公式を用いて，$t^2=\dfrac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}$ から，

$$t^2(1+\cos 2\theta)=1-\cos 2\theta,\ \cos 2\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

また，2 倍角の公式$\tan 2\theta=\dfrac{2t}{1-t^2}$ より，$\sin 2\theta=\dfrac{2t}{1-t^2}\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}=\dfrac{2t}{1+t^2}$

すると，$A\left(\dfrac{3}{t},\ 0,\ 0\right)$，$B\left(\dfrac{3}{t}\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ \dfrac{3}{t}\cdot\dfrac{2t}{1+t^2},\ 0\right)$となり，

$$\overrightarrow{CA}=\left(\frac{3}{t},\ 0,\ -3\right)=\frac{3}{t}(1,\ 0,\ -t)$$

$$\overrightarrow{BA}=\left(\frac{3}{t}\cdot\frac{2t^2}{1+t^2},\ -\frac{3}{t}\cdot\frac{2t}{1+t^2},\ 0\right)=\frac{6}{1+t^2}(t,\ -1,\ 0)$$

さて，平面 ABC の法線ベクトルを$\vec{n}=(a,\ b,\ c)$とおくと，

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{CA}=a-ct=0\cdots\cdots\cdots①,\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BA}=at-b=0\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$a=ct$，$b=at=ct^2$ となり，$\vec{n}=c(t,\ t^2,\ 1)$ である。

これより，平面 ABC の方程式は，$tx+t^2y+z-3=0$ となり，O から下ろした垂線の長さ OH は，

$$OH=\frac{|-3|}{\sqrt{t^2+t^4+1}}=\frac{3}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$$

(2)　$\overrightarrow{OH}=OH\cdot\dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\dfrac{3}{\sqrt{t^4+t^2+1}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}(t,\ t^2,\ 1)=\dfrac{3}{t^4+t^2+1}(t,\ t^2,\ 1)$

よって，H の $z$ 座標は，$z=\dfrac{3}{t^4+t^2+1}$ である。

［解 説］

三垂線の定理の系から始めた後，代数的処理という旗幟不鮮明な解になりました。

**4**

問題のページへ

(1)　$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=a_{n+1}+6a_n$ ……(＊)で定められる数列$\{a_n\}$について，その一の位の数列を$\{b_n\}$とおくと，

$$b_1=1,\ b_2=2,\ b_3=8,\ b_4=0,\ b_5=8,\ b_6=8,\ b_7=6,\ b_8=4,\ b_9=0,$$
$$b_{10}=4,\ b_{11}=4,\ b_{12}=8,\ b_{13}=2,\ b_{14}=0,\ b_{15}=2,\ b_{16}=2,\ b_{17}=4,$$
$$b_{18}=6,\ b_{19}=0,\ b_{20}=6,\ b_{21}=6,\ b_{22}=2,\ b_{23}=8,\ b_{24}=0,\ \cdots\cdots$$

すると，$b_{22}=b_2$，$b_{23}=b_3$となり，(＊)から，$n\geqq 2$ において，数列$\{b_n\}$は周期 20 の周期数列となる。

さて，$2010=1+20\times 100+9$ より，$b_{2010}=b_{1+9}=4$ となるので，$a_{2010}$ を 10 で割った余りは 4 である。

(2)　$a_2=3a_1$ のとき，(＊)より，

$$a_3=a_2+6a_1=9a_1,\ a_4=a_3+6a_2=27a_1,\ a_5=a_4+6a_3=81a_1$$

これより，$a_n=3^{n-1}a_1$ と予測できる。

まず，この予測の正しいことを，数学的帰納法を用いて証明する。

(i)　$n=1,\ 2$ のとき　条件より成立する。

(ii)　$n=k,\ k+1$ のとき　$a_k=3^{k-1}a_1$，$a_{k+1}=3^k a_1$ と仮定すると，(＊)より，

$$a_{k+2}=a_{k+1}+6a_k=3^k a_1+6\cdot 3^{k-1}a_1=(1+2)\cdot 3^k a_1=3^{k+1}a_1$$

(i)(ii)より，すべての自然数 $n$ に対して，$a_n=3^{n-1}a_1$ である。

すると，$a_{n+4}-a_n=3^{n+3}a_1-3^{n-1}a_1=(3^4-1)\cdot 3^{n-1}a_1=10\times(8\cdot 3^{n-1}a_1)$

よって，$a_{n+4}-a_n$ は 10 の倍数である。

［解　説］

漸化式と整数の融合問題は，1993 年に東大，1994 年に京大で出題された後，しばらく頻出のものでした。ただ，本問は，上記の過去問と異なり，漸化式が簡単な形で解けるので，この結果を利用したほうがよいのかどうか，かえって迷ってしまいます。この影響のためか，(1)と(2)は異なる立場での解答例となっています。

**5**

問題のページへ

(1)　$A_2$, $A_3$, …, $A_n$ が 1 つも起こらないのは，$X_1 \neq X_2 \neq X_3 \neq \cdots \neq X_{n-1} \neq X_n$ の場合より，その確率は，

$$1 \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \cdots \times \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

これより，$A_2$, $A_3$, …, $A_n$ のうち少なくとも 1 つが起こる確率 $p_n$ は，

$$p_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

(2)　$A_2$, $A_3$, …, $A_n$ のうち，1 つだけが起こるのは，$X_1 = X_2 \neq X_3 \neq \cdots \neq X_{n-1} \neq X_n$，$X_1 \neq X_2 = X_3 \neq \cdots \neq X_{n-1} \neq X_n$，…，$X_1 \neq X_2 \neq X_3 \neq \cdots \neq X_{n-1} = X_n$ の場合より，その確率は，

$$_{n-1}\mathrm{C}_1 \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} = \frac{n-1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} = \frac{n-1}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

これより，$A_2$, $A_3$, …, $A_n$ のうち少なくとも 2 つが起こる確率 $q_n$ は，(1)の結果を合わせて，

$$q_n = p_n - \frac{n-1}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - \frac{n-1}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = 1 - \frac{n+4}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

［解　説］

余事象を考える確率の問題ですが，2000 年に出された類似した設定の問題と比べると，かなり基本的です。