1　　解答解説のページへ

(1)　自然数 x, y は，$1<x<y$ および $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{5}{3}$ を満たす。x, y の組をすべて求めよ。

(2)　自然数 x, y, z は，$1<x<y<z$ および $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1+\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{12}{5}$ を満たす。x, y, z の組をすべて求めよ。

2

解答解説のページへ

点 O を中心とする半径 r の円周上に，2 点 A, B を$\angle\mathrm{AOB}<\dfrac{\pi}{2}$となるようにとり，$\theta=\angle\mathrm{AOB}$とおく。この円周上に点 C を，線分 OC が線分 AB と交わるようにとり，線分 AB 上に点 D をとる。また，点 P は線分 OA 上を，点 Q は線分 OB 上を，それぞれ動くとする。

(1)　$\mathrm{CP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QC}$ の最小値を r と θ で表せ。

(2)　$a=\mathrm{OD}$ とおく。$\mathrm{DP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QD}$ の最小値を a と θ で表せ。

(3)　さらに，点 D が線分 AB 上を動くときの $\mathrm{DP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QD}$ の最小値を r と θ で表せ。

3

解答解説のページへ

xy 平面上に放物線 $C : y = -3x^2 + 3$ と 2 点 A$(1,\ 0)$，P$(0,\ 3p)$ がある。線分 AP と C は, A とは異なる点 Q を共有している。

(1)　定数 p の存在する範囲を求めよ。

(2)　S_1 を，C と線分 AQ で囲まれた領域とし，S_2 を，C, 線分 QP, および y 軸とで囲まれた領域とする。S_1 と S_2 の面積の和が最小となる p の値を求めよ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

$a,\ b,\ c$ を正の定数とする。空間内に 3 点 $\mathrm{A}(a,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ b,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ c)$ がある。

(1) 辺 AB を底辺とするとき，△ABC の高さを a, b, c で表せ。

(2) △ABC, △OAB, △OBC, △OCA の面積をそれぞれ $S,\ S_1,\ S_2,\ S_3$ とする。ただし, O は原点である。このとき，不等式 $\sqrt{3}S \geqq S_1+S_2+S_3$ が成り立つことを示せ。

(3) (2)の不等式において等号が成り立つための条件を求めよ。

5

解答解説のページへ

A と B の 2 人が, 1 個のサイコロを次の手順により投げ合う。

1 回めは A が投げる。

1, 2, 3 の目が出たら, 次の回には同じ人が投げる。

4, 5 の目が出たら, 次の回には別の人が投げる。

6 の目が出たら, 投げた人を勝ちとし, それ以降は投げない。

(1) n 回目に A がサイコロを投げる確率 a_n を求めよ。

(2) ちょうど n 回目のサイコロ投げで A が勝つ確率 p_n を求めよ。

(3) n 回以内のサイコロ投げで A が勝つ確率 q_n を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$1<x<y$ を満たす自然数 x, y に対して，条件より，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{5}{3}$ ………①

すると，$1>\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{y}>0$ から，$\dfrac{5}{3}=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)<\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2$ となり，

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}<1+\frac{1}{x},\ \frac{1}{x}>\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}},\ x<\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}+3}{2}<\frac{7}{2}$$

よって，$x=2,\ 3$ である。

(i)　$x=2$ のとき　①より，$1+\dfrac{1}{y}=\dfrac{10}{9}$ となり，$y=9$

(ii)　$x=3$ のとき　①より，$1+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{4}$ となり，$y=4$

(2)　$1<x<y<z$ を満たす自然数 x, y, z に対して，条件より，

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)=\frac{12}{5}\ \cdots\cdots\cdots②$$

すると，$1>\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{y}>\dfrac{1}{z}>0$ から，$\dfrac{12}{5}=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1+\dfrac{1}{z}\right)<\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^3$ となり，

$$\frac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{5}}<1+\frac{1}{x},\ \frac{1}{x}>\frac{\sqrt[3]{12}-\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}}$$

$$x<\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{12}-\sqrt[3]{5}}=\frac{\sqrt[3]{5}\,(\sqrt[3]{12^2}+\sqrt[3]{12\cdot 5}+\sqrt[3]{5^2})}{12-5}=\frac{\sqrt[3]{720}+\sqrt[3]{300}+5}{7}$$

ここで，$\sqrt[3]{720}<9$，$\sqrt[3]{300}<7$ から，$x<\dfrac{9+7+5}{7}=3$ となり，$x=2$ である。

よって，②より，$\dfrac{3}{2}\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1+\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{12}{5}$，$\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1+\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{8}{5}$ ………③

同様にして，$\dfrac{8}{5}<\left(1+\dfrac{1}{y}\right)^2$ から，$\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{5}}<1+\dfrac{1}{y}$，$\dfrac{1}{y}>\dfrac{\sqrt{8}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ となり，

$$y<\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{40}+5}{3}<\frac{7+5}{3}=4$$

よって，$y=3$ となり，③より $1+\dfrac{1}{z}=\dfrac{6}{5}$，すなわち $z=5$ である。

以上より，求める自然数の組は，$x=2$，$y=3$，$z=5$ である。

［解 説］

(1)の方程式は，分母を払うと有名な形になりますが，(2)と同じ方針にするために，不等式で評価する方法をとりました。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　点 C の直線 OA, OB に関する対称点を，それぞれ C'，C'' とおくと，

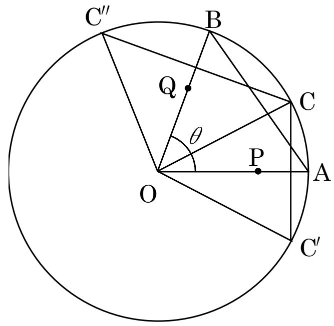
$$\mathrm{OC}=\mathrm{OC}'=\mathrm{OC}''=r$$

また，$\angle\mathrm{AOB}=\theta<\dfrac{\pi}{2}$ から $\angle\mathrm{C'OC''}=2\theta<\pi$ となり，

$$\mathrm{CP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QC}=\mathrm{C'P}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QC''}\geqq\mathrm{C'C''}$$

よって，$\mathrm{CP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QC}$ の最小値は，

$$\mathrm{C'C''}=2r\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\cdot2\theta\right)=2r\sin\theta$$



(2)　点 D の直線 OA, OB に関する対称点を，それぞれ D'，D'' とおくと，

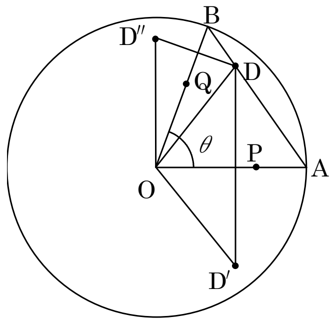
$$\mathrm{OD}=\mathrm{OD}'=\mathrm{OD}''=a$$

また，$\angle\mathrm{AOB}=\theta<\dfrac{\pi}{2}$ から $\angle\mathrm{D'OD''}=2\theta<\pi$ となり，

$$\mathrm{DP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QD}=\mathrm{D'P}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QD''}\geqq\mathrm{D'D''}$$

よって，$\mathrm{DP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QD}$ の最小値は，同様に，

$$\mathrm{D'D''}=2a\sin\theta$$



(3)　a の取り得る値の範囲は，$r\cos\dfrac{\theta}{2}\leqq a\leqq r$

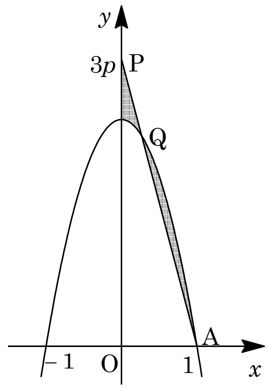
よって，$\mathrm{DP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QD}$ の最小値は, (2)より，$2r\cos\dfrac{\theta}{2}\sin\theta$ である。

［解　説］

折り返しを利用して最短経路を求める有名問題です。ただ, (2)は(1)の繰り返しなので, 不気味な感じがします。

$\boxed{3}$

問題のページへ



(1)　$C : y = -3x^2 + 3$ ……①と $\mathrm{AP} : y = -3p(x-1)$ ……②を連立すると，

$$-3x^2 + 3 = -3p(x-1),\ \ -3(x-1)(x+1-p) = 0$$

よって，$x = 1,\ p-1$ となり，線分 AP と C が A とは異なる点 Q を共有していることから，

$$0 \leqq p-1 < 1,\ \ 1 \leqq p < 2$$

(2)　C と線分 AQ で囲まれた領域 S_1 の面積 T_1 は，

$$T_1 = \int_{p-1}^{1} \left\{ -3x^2 + 3 + 3p(x-1) \right\} dx$$

$$= -3\int_{p-1}^{1} (x-1)(x+1-p)\,dx$$

$$= -3\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(1-p+1)^3 = \frac{1}{2}(2-p)^3$$

また，C，線分 QP，および y 軸とで囲まれた領域 S_2 の面積 T_2 は，

$$T_2 = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3p + T_1 - \int_0^1 (-3x^2+3)\,dx = \frac{3}{2}p + T_1 - \Big[-x^3 + 3x \Big]_0^1$$

$$= T_1 + \frac{3}{2}p - 2$$

ここで，S_1 と S_2 の面積の和を T とおくと，

$$T = T_1 + T_2 = 2\cdot\frac{1}{2}(2-p)^3 + \frac{3}{2}p - 2 = -p^3 + 6p^2 - \frac{21}{2}p + 6$$

$$T' = -3p^2 + 12p - \frac{21}{2} = -\frac{3}{2}(2p^2 - 8p + 7)$$

$1 \leqq p < 2$ における $T' = 0$ の解は，$p = \dfrac{4-\sqrt{2}}{2}$ であり，T の増減は右表のようになる。

p	1	…	$\dfrac{4-\sqrt{2}}{2}$	…	2
T'		$-$	0	$+$	
T		↘		↗	

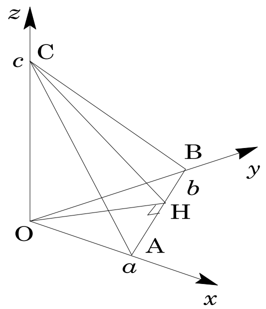
よって，$p = \dfrac{4-\sqrt{2}}{2}$ のとき T は最小となる。

［解　説］

T_2 は，普通に 0 から $p-1$ までの積分計算でも求められます。ただ，所要時間が 2 倍ほどになります。

$\boxed{4}$

問題のページへ



(1)　O から AB に垂線 OH を引くと，三垂線の定理から，$\mathrm{CH}\perp\mathrm{AB}$ である。

$\mathrm{AB}=\sqrt{a^2+b^2}$ から，$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積を考えて，

$$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\cdot\mathrm{OH},\ \ \mathrm{OH}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

よって，$\triangle\mathrm{ABC}$ の底辺を AB とするとき，高さ CH は，

$$\mathrm{CH}=\sqrt{\mathrm{OH}^2+c^2}=\sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}+c^2}$$
$$=\sqrt{\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2+b^2}}$$

(2)　まず，$S_1=\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}ab$，$S_2=\triangle\mathrm{OBC}=\frac{1}{2}bc$，$S_3=\triangle\mathrm{OCA}=\frac{1}{2}ca$ であり，

$$S=\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CH}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2+b^2}}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$$

さて，$\vec{p}=(1,\ 1,\ 1)$，$\vec{q}=(ab,\ bc,\ ca)$ とし，$\vec{p}$ と $\vec{q}$ のなす角を θ とおくと，a，b，c が正の数より，$0\leqq\theta<\frac{\pi}{2}$ となり，

$$\vec{p}\cdot\vec{q}=|\vec{p}||\vec{q}|\cos\theta\leqq|\vec{p}||\vec{q}|$$

よって，$\sqrt{3}\cdot\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\geqq ab+bc+ca$ から，両辺を $\frac{1}{2}$ 倍して，

$$\sqrt{3}S\geqq S_1+S_2+S_3$$

(3)　等号が成立するのは，$\cos\theta=1$，すなわち $\vec{p}$ と $\vec{q}$ が同じ向きのときで，

$$(ab,\ bc,\ ca)=k(1,\ 1,\ 1)\ \ (k>0)$$

よって，$ab=bc=ca$，すなわち $a=b=c$ のときである。

［解　説］

(1)はいろいろな解法が考えられますが，昨年と同様に，三垂線の定理を利用しました。また，(2)は有名なコーシー・シュワルツの不等式を用いて解いています。直接的に，両辺を 2 乗した後，差をとっても証明できます。

5

問題のページへ

(1)　n 回目に A, B がサイコロを投げる確率を，それぞれ a_n，b_n とおくと，条件より，$a_1=1$，$b_1=0$ である。

さて，$n+1$ 回目に A がサイコロを投げるのは，n 回目に A がサイコロを投げ 1, 2, 3 のいずれかの目が出るか，または n 回目に B がサイコロを投げ 4, 5 のいずれかの目が出るときなので，

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{3}b_n\cdots\cdots\cdots①$$

また，$n+1$ 回目に B がサイコロを投げるのは，n 回目に A がサイコロを投げ 4, 5 のいずれかの目が出るか，または n 回目に B がサイコロを投げ 1, 2, 3 のいずれかの目が出るときなので，

$$b_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{2}b_n\cdots\cdots\cdots②$$

①＋②より，$a_{n+1}+b_{n+1}=\frac{5}{6}(a_n+b_n)$ となり，

$$a_n+b_n=(a_1+b_1)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdots\cdots\cdots③$$

①－②より，$a_{n+1}-b_{n+1}=\frac{1}{6}(a_n-b_n)$ となり，

$$a_n-b_n=(a_1-b_1)\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$a_n=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}$

(2)　n 回目のサイコロ投げで A が勝つのは，n 回目に A がサイコロを投げ，6 の目を出すときより，その確率 p_n は, (1)より，

$$p_n=\frac{1}{6}a_n=\frac{1}{12}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}$$

(3)　n 回以内のサイコロ投げで A が勝つ確率 q_n は, (2)より，

$$q_n=\sum_{k=1}^{n}p_k=\frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}+\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}\right\}=\frac{1}{12}\left\{\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n}{1-\frac{5}{6}}+\frac{1-\left(\frac{1}{6}\right)^n}{1-\frac{1}{6}}\right\}$$

$$=\frac{1}{12}\cdot6\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right\}+\frac{1}{12}\cdot\frac{6}{5}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right\}=\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^n-\frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

［解　説］

確率を計算するときに，漸化式を立てることが有効なタイプの問題です。なお，(2)は疑心暗鬼になってしまう不思議な設問です。