1　解答解説のページへ

1 つの角が $120°$ の三角形がある。この三角形の 3 辺の長さ $x,\ y,\ z$ は $x<y<z$ を満たす整数である。

(1)　$x+y-z=2$ を満たす x, y, z の組をすべて求めよ。

(2)　$x+y-z=3$ を満たす x, y, z の組をすべて求めよ。

(3)　$a,\ b$ を 0 以上の整数とする。$x+y-z=2^a3^b$ を満たす $x,\ y,\ z$ の組の個数を a と b の式で表せ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

a を 0 以上の定数とする。関数 $y=x^3-3a^2x$ のグラフと方程式 $|x|+|y|=2$ で表される図形の共有点の個数を求めよ。

3

解答解説のページへ

定数 a, b, c, d に対して，平面上の点$(p,\ q)$を点$(ap+bq,\ cp+dq)$に移す操作を考える。ただし，$(a,\ b,\ c,\ d)\neq(1,\ 0,\ 0,\ 1)$である。$k$ を 0 でない定数とする。放物線$C: y=x^2-x+k$上のすべての点は，この操作によって C 上に移る。

(1) a, b, c, d を求めよ。

(2) C 上の点 A における C の接線と，点 A をこの操作によって移した点 A$'$ における C の接線は，原点で直交する。このときの k の値および点 A の座標をすべて求めよ。

4

解答解説のページへ

xyz 空間内の平面 $z=2$ 上に点 P があり，平面 $z=1$ 上に点 Q がある。直線 PQ と xy 平面の交点を R とする。

(1)　P(0, 0, 2) とする。点 Q が平面 $z=1$ 上で点(0, 0, 1) を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，点 R の軌跡の方程式を求めよ。

(2)　平面 $z=1$ 上に，4 点 A(1, 1, 1)，B(1, -1, 1)，C(-1, -1, 1)，D(-1, 1, 1) をとる。点 P が平面 $z=2$ で点(0, 0, 2) を中心とする半径 1 の円周上を動き，点 Q が正方形 ABCD 上を動くとき，点 R が動きうる領域を xy 平面上に図示し，その面積を求めよ。

$\boxed{5}$　解答解説のページへ

最初に 1 の目が上面にあるようにサイコロが置かれている。その後, 4 つの側面から 1 つの面を無作為に選び, その面が上面となるように置き直す操作を n 回繰り返す。なお, サイコロの向かい合う面の目の数の和は 7 である。

(1) 最後に 1 の目が上面にある確率を求めよ。

(2) 最後に上面にある目の数の期待値を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　3 辺の長さが x, y, z $(x<y<z)$ で 1 つの角が$120°$の三角形は, 最大辺の対角が$120°$となるので, 余弦定理より,

$$z^2=x^2+y^2-2xy\cos 120°,\ z^2=x^2+y^2+xy\cdots\cdots\cdots①$$

条件より, $x+y-z=2$から, $z=x+y-2\cdots\cdots\cdots②$

①②より, $(x+y-2)^2=x^2+y^2+xy$, $xy-4x-4y+4=0$

ここで, x, y, z は正の整数から, $(x-4)(y-4)=12$

$-4<x-4<y-4$ より, $(x-4,\ y-4)=(1,\ 12),\ (2,\ 6),\ (3,\ 4)$

$$(x,\ y)=(5,\ 16),\ (6,\ 10),\ (7,\ 8)$$

よって, ②より, $(x,\ y,\ z)=(5,\ 16,\ 19),\ (6,\ 10,\ 14),\ (7,\ 8,\ 13)$

(2)　条件より, $x+y-z=3$から, $z=x+y-3\cdots\cdots\cdots③$

①③より, $(x+y-3)^2=x^2+y^2+xy$, $xy-6x-6y+9=0$

ここで, x, y は正の整数から, $(x-6)(y-6)=27$

$-6<x-6<y-6$ より, $(x-6,\ y-6)=(1,\ 27),\ (3,\ 9)$

$$(x,\ y)=(7,\ 33),\ (9,\ 15)$$

よって, ③より, $(x,\ y,\ z)=(7,\ 33,\ 37),\ (9,\ 15,\ 21)$

(3)　条件より, $x+y-z=2^a3^b$から, $z=x+y-2^a3^b\cdots\cdots\cdots④$

①④より, $(x+y-2^a3^b)^2=x^2+y^2+xy$, $xy-2^{a+1}3^bx-2^{a+1}3^by+2^{2a}3^{2b}=0$

ここで, x, y は正の整数から, $(x-2^{a+1}3^b)(y-2^{a+1}3^b)=2^{2a}3^{2b+1}\cdots\cdots\cdots⑤$

さて, $x<y<z$ から, ④に代入すると, $2^a3^b<x<y$ となり,

$$-2^a3^b<x-2^{a+1}3^b<y-2^{a+1}3^b\cdots\cdots\cdots⑥$$

ここで, $-2^a3^b<x-2^{a+1}3^b<y-2^{a+1}3^b<0$ と仮定すると,

$$(x-2^{a+1}3^b)(y-2^{a+1}3^b)<(2^a3^b)^2=2^{2a}3^{2b}$$

すると, $2^{2a}3^{2b}<2^{2a}3^{2b+1}$ から, ⑤を満たす x, y は存在しない。

よって, $2^{2a}3^{2b+1}$ の約数 $x-2^{a+1}3^b$, $y-2^{a+1}3^b$ はともに正となる。

一方, $2^{2a}3^{2b+1}$ の正の約数の個数は, $(2a+1)(2b+2)$ であり, $2^{2a}3^{2b+1}$ は平方数でないので, $x-2^{a+1}3^b=y-2^{a+1}3^b$ の場合はありえない。

これから, ⑤⑥を満たす$(x,\ y)$の個数は, $\dfrac{1}{2}(2a+1)(2b+2)=(2a+1)(b+1)$ となる。すなわち, ①④を満たす$(x,\ y,\ z)$の個数は, $(2a+1)(b+1)$ である。

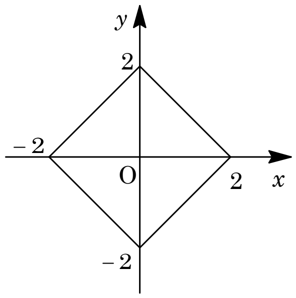
［解　説］

(1)(2)は頻出タイプの問題ですが, それを一般化した(3)は, 論理をつめるのに時間がかかります。

2

問題のページへ

まず，方程式$|x|+|y|=2$ ……①で表される図形は，対称性を考えると，右図の正方形となる。



また，$y=x^3-3a^2x$ ……②に対して，

(i)　$a=0$ のとき

②が，$y=x^3$ となることより，①の図形と②のグラフの共有点は明らかに 2 個である。

(ii)　$a>0$ のとき

$$y'=3x^2-3a^2=3(x-a)(x+a)$$

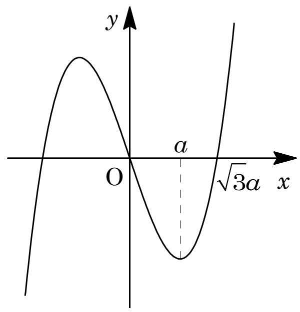
グラフが原点対称であることを考え，$x\geqq 0$ における増減について調べると，右表のようになる。

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y	0	↘		↗

$x>0$ における②のグラフと x 軸との交点は，

$$x^3-3a^2x=0\,,\ \ x=\sqrt{3}a$$

これより，②のグラフの概形は右図のようになる。



さて，①の図形と②のグラフの共有点の個数について，まず，第 1 象限には，$\sqrt{3}a<2\left(0<a<\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\right)$のとき 1 個存在し，それ以外のときは存在しない。

次に，x 軸の正の部分には，$\sqrt{3}a=2\left(a=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\right)$のとき 1 個存在し，それ以外のときは存在しない。

さらに，第 4 象限での共有点の個数を調べるために，②と $y=x-2\ (0<x<2)$ とを連立して，

$$x^3-3a^2x=x-2\,,\ \ x^3-(3a^2+1)x+2=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$f(x)=x^3-(3a^2+1)x+2$ とおくと，③は$f(x)=0$となり，

$$f'(x)=3x^2-(3a^2+1)$$

すると，$x>0$ における$f(x)$の増減は右表のようになり，

x	0	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{3a^2+1}{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	2	↘		↗

$$f\left(\sqrt{\frac{3a^2+1}{3}}\right)=-\frac{2(3a^2+1)}{3}\sqrt{\frac{3a^2+1}{3}}+2$$

そこで，$f\left(\sqrt{\dfrac{3a^2+1}{3}}\right)<0$ とすると，$\dfrac{3a^2+1}{3}\sqrt{\dfrac{3a^2+1}{3}}=\left(\dfrac{3a^2+1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}>1$となり，

$$\frac{3a^2+1}{3}>1\,,\ \ a>\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

すなわち，第 4 象限での共有点の個数は，$\dfrac{\sqrt{6}}{3}<\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ に注意すると，$a=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ のとき 1 個，$\dfrac{\sqrt{6}}{3}<a<\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ のとき 2 個，また $a\geqq\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ のとき 1 個となる。それ以外のときは存在しない。

よって，$a>0$ では，$0<a<\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ のとき 1 個，$a=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ のとき 2 個，$\dfrac{\sqrt{6}}{3}<a<\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ のとき 3 個，$a=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ のとき 2 個，$a>\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ のとき 1 個となる。

(i)(ii)より，①の図形と②のグラフが，ともに原点対称であることを考え合わせると，求める共有点の個数は以下のようになる。

$0\leqq a<\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$a>\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ のとき 2 個，$a=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ のとき 4 個，$\dfrac{\sqrt{6}}{3}<a<\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ のとき 6 個である。

［解　説］

a の変化に伴う②のグラフの動きを視覚的にとらえて解く問題です。この下書きの段階で計算の手順が決まります。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1) $C: y=x^2-x+k$ 上の任意の点 $(t,\ t^2-t+k)$ は，条件で与えられた操作によって，$(at+b(t^2-t+k),\ ct+d(t^2-t+k))$ に移る。この点が C 上にあることより，

$$ct+d(t^2-t+k)=\left\{at+b(t^2-t+k)\right\}^2-\left\{at+b(t^2-t+k)\right\}+k\cdots\cdots\cdots①$$

任意の t に対して①が成立するので，両辺の t^4 の係数を比べると $b=0$ が必要となる。これを①に代入して整理すると，

$$dt^2+(c-d)t+dk=a^2t^2-at+k\cdots\cdots\cdots②$$

さらに，任意の t に対して②が成立するので，

$$d=a^2\cdots\cdots\cdots③,\ c-d=-a\cdots\cdots\cdots④,\ dk=k\cdots\cdots\cdots⑤$$

$k\neq 0$ なので，⑤より $d=1$ となり，③から $a=\pm 1$

$a=1$ のとき，④から $c=0$ となるが，$(a,\ b,\ c,\ d)\neq(1,\ 0,\ 0,\ 1)$ より不適である。また，$a=-1$ のとき，④から $c=2$ となる。

以上より，$(a,\ b,\ c,\ d)=(-1,\ 0,\ 2,\ 1)$

(2) 点 $\mathrm{A}(p,\ p^2-p+k)$ とおくと，(1)から，$\mathrm{A}'(-p,\ p^2+p+k)$ となる。

ここで，$y=x^2-x+k$ に対し，$y'=2x-1$ となるので，点Aにおける接線は，

$$y-(p^2-p+k)=(2p-1)(x-p),\ y=(2p-1)x-p^2+k\cdots\cdots\cdots⑥$$

また，点 A' における接線は，

$$y-(p^2+p+k)=(-2p-1)(x+p),\ y=-(2p+1)x-p^2+k\cdots\cdots\cdots⑦$$

直線⑥と⑦が原点で直交することより，

$$-p^2+k=0\cdots\cdots\cdots⑧,\ -(2p-1)(2p+1)=-1\cdots\cdots\cdots⑨$$

⑨より，$4p^2-1=1$ から $p=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となり，⑧より $k=\dfrac{1}{2}$

すると，点Aの y 座標は，$y=\dfrac{1}{2}\mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2}=1\mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ （複号同順）となり，

$$\mathrm{A}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \mathrm{A}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ 1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

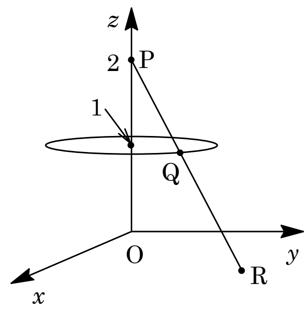
［解 説］

1 次変換の問題ですが，その知識は必要ではありません。なお，①は複雑なので，いったん必要条件を求めて整理しています。

4

問題のページへ

(1)　P(0, 0, 2)，Q(s, t, 1)，R(x, y, 0) とおくと，条件より，$s^2+t^2=1$ ………①



また，線分 PR の中点が Q より，

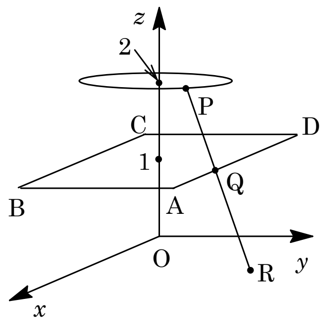
$\dfrac{x}{2}=s$ ………②，$\dfrac{y}{2}=t$ ………③

②③を①に代入すると，$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}=1$ から，

$x^2+y^2=4$

よって，点 R の軌跡の方程式は，$x^2+y^2=4$，$z=0$

(2)　P(p, q, 2)，Q(s, t, 1)，R(x, y, 0) とおくと，条件より，$p^2+q^2=1$ ………④



また，線分 PR の中点が Q より，

$\dfrac{x+p}{2}=s$ ………⑤，$\dfrac{y+q}{2}=t$ ………⑥

⑤⑥より，$p=2s-x$，$q=2t-y$

④に代入すると，$(2s-x)^2+(2t-y)^2=1$

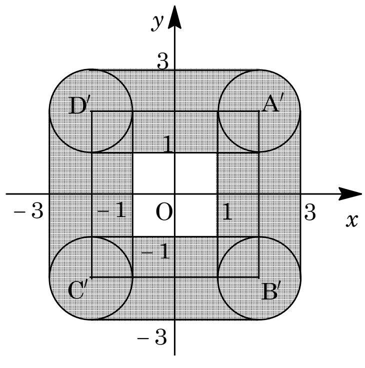
$(x-2s)^2+(y-2t)^2=1$ ………⑦

さて，点 Q が辺 AB 上にあるとき，

$s=1$，$-1\leqq t\leqq 1$

⑦より，$(x-2)^2+(y-2t)^2=1$ となり，点 R は xy 平面上で，中心 $(2,\ 2t,\ 0)$，半径 1 の円を描く。なお，$-2\leqq 2t\leqq 2$ より，中心は点 A′(2, 2, 0) と B′(2, −2, 0) を結ぶ線分上にある。

さらに，点 C′(−2, −2, 0)，D′(−2, 2, 0) とおき，同様に考えると，Q が正方形 ABCD の辺上を動くとき，点 R は中心が正方形 A′B′C′D′ の辺上で半径が 1 の円周上を動く。



すると，点 R の動きうる領域は右図の網点部となり，その面積を S とすると，

$$S=4\left\{3^2-1^2-\left(1^2-\frac{\pi}{4}\right)\right\}=28+\pi$$

[解　説]

20 年前に，よく見かけた問題です。(2)は，まず Q を固定して R の変化をとらえ，その状態を保ったまま Q を動かすという手法です。

5

問題のページへ

(1) 操作を n 回繰り返した後，サイコロの上面が 1 である確率を p_n，6 である確率を q_n とおくと，上面が 2, 3, 4, 5 のいずれかである確率は $1-p_n-q_n$ となる。

さて，$n+1$ 回目に上面が 1 となるのは，n 回目に上面が 2, 3, 4, 5 のいずれかであり，次に $\frac{1}{4}$ の確率で 1 の側面を選んで上面となるように置き直せばよいことから，

$$p_{n+1}=\frac{1}{4}(1-p_n-q_n)\cdots\cdots\cdots①$$

また，$n+1$ 回目に上面が 6 となるのは，同様に考えて，

$$q_{n+1}=\frac{1}{4}(1-p_n-q_n)\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$p_{n+1}=q_{n+1}$ となり，$p_1=q_1=0$ から，$n\geqq 1$ で $p_n=q_n$ である。

①に代入すると，$p_{n+1}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}p_n$ となり，$p_{n+1}-\frac{1}{6}=-\frac{1}{2}\left(p_n-\frac{1}{6}\right)$ から，

$$p_n-\frac{1}{6}=\left(p_1-\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$$

よって，$p_n=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$

(2) n 回目に上面が 2, 3, 4, 5 となるいずれの場合も対等なので，その確率は，それぞれ $\frac{1}{4}(1-p_n-q_n)$ ずつである。

操作を n 回繰り返した後，サイコロの上面の目の数の期待値 E は，$p_n=q_n$ から，

$$E=1\cdot p_n+(2+3+4+5)\cdot\frac{1}{4}(1-p_n-q_n)+6q_n$$
$$=p_n+\frac{7}{2}(1-2p_n)+6p_n=\frac{7}{2}$$

［解　説］

漸化式の確率への応用として有名な問題です。過去問を挙げると，きりがないくらい出題されています。