1

解答解説のページへ

$3p^3 - p^2q - pq^2 + 3q^3 = 2013$ を満たす正の整数 $p,\ q$ の組をすべて求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

平面上の 4 点 O, A, B, C が，$\mathrm{OA}=4$，$\mathrm{OB}=3$，$\mathrm{OC}=2$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=3$ を満たすとき，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積の最大値を求めよ。

3

解答解説のページへ

原点を O とする xy 平面上に，放物線 $C: y=1-x^2$ がある。C 上に 2 点 $\mathrm{P}(p,\ 1-p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ 1-q^2)$ を $p<q$ となるようにとる。

(1) 2 つの線分 OP, OQ と放物線 C で囲まれた部分の面積 S を，p と q の式で表せ。

(2) $q=p+1$ であるとき S の最小値を求めよ。

(3) $pq=-1$ であるとき S の最小値を求めよ。

4　　解答解説のページへ

t を正の定数とする。原点を O とする空間内に，2 点 A$(2t,\ 2t,\ 0)$，B$(0,\ 0,\ t)$ がある。また動点 P は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=3$$

を満たすように動く。OP の最大値が 3 となるような t の値を求めよ。

$\boxed{5}$　　解答解説のページへ

サイコロを n 回投げ，k 回目に出た目を a_k とする。また，s_n を $s_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}10^{n-k}a_k$ で定める。

(1)　s_n が 4 で割り切れる確率を求めよ。

(2)　s_n が 6 で割り切れる確率を求めよ。

(3)　s_n が 7 で割り切れる確率を求めよ。

1　　問題のページへ

正の整数 $p,\ q$ に対して，$3p^3-p^2q-pq^2+3q^3=2013$ より，

$$3(p+q)(p^2-pq+q^2)-pq(p+q)=2013$$

$$(p+q)(3p^2-4pq+3q^2)=3\cdot 11\cdot 61\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$p+q\geqq 2$ であり，

$$3p^2-4pq+3q^2=2(p-q)^2+p^2+q^2\geqq p^2+q^2\geqq p+q$$

よって，$(*)$より，$p+q=3,\ 11,\ 33$ となる。

(i)　$p+q=3$ のとき

このとき，$(p,\ q)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$ となる。

ところが，$(*)$から $3p^2-4pq+3q^2=671$ となるが，ともに満たさない。

(ii)　$p+q=11$ のとき

$(*)$より，$3p^2-4pq+3q^2=183$ となり，$3(p+q)^2-10pq=183$ から，

$$363-10pq=180,\quad pq=18$$

$p,\ q$ は，方程式 $x^2-11x+18=0$ の 2 つの解となり，$(x-2)(x-9)=0$ より，

$$(p,\ q)=(2,\ 9),\ (9,\ 2)$$

(iii)　$p+q=33$ のとき

$(*)$より，$3p^2-4pq+3q^2=61$ となり，$3(p+q)^2-10pq=61$ から，

$$3267-10pq=61,\quad 10pq=3206$$

$p,\ q$ は正の整数なので，成立しない。

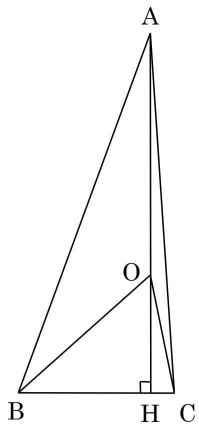
(i)〜(iii)より，$(p,\ q)=(2,\ 9),\ (9,\ 2)$

［解 説］

2013 という年度が題材の整数問題です。全部で 8 通りの場合分けをいかに少なくするかという技法が求められます。

2

問題のページへ



$\mathrm{OB}=3$，$\mathrm{OC}=2$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=3$ より，$\cos\angle\mathrm{BOC}=\dfrac{3}{3\times 2}=\dfrac{1}{2}$ となり，$\angle\mathrm{BOC}=60^\circ$ である。

すると，$\triangle\mathrm{OBC}=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\sin 60^\circ=\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$ となり，

$$\mathrm{BC}^2=3^2+2^2-2\cdot 3\cdot 2\cos 60^\circ=7,\ \ \mathrm{BC}=\sqrt{7}$$

ここで, 点 O から直線 BC へ下ろした垂線の足を H とすると,

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{7}\cdot\mathrm{OH}=\frac{3}{2}\sqrt{3},\ \ \mathrm{OH}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

以上より，△ABC の面積が最大となるのは, 点 A が HO の延長線上にあるときで，$\mathrm{OA}=4$ から，その値は,

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{7}\cdot\left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}+4\right)=\frac{3}{2}\sqrt{3}+2\sqrt{7}$$

［解 説］

△OBC は決定されるので, 点 A が辺 BC からいちばん離れたところに位置する場合を求めればよいことになります。なお, OH の長さは勢いで求めてしまいましたが, 必要ありませんでした。

3

問題のページへ

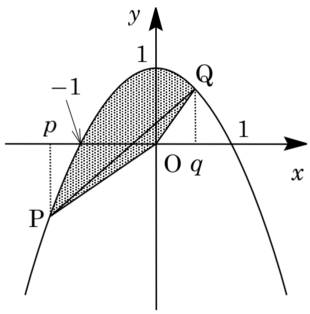
(1)　放物線 $C: y=1-x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ 1-p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ 1-q^2)$ $(p<q)$ に対して,直線 PQ の方程式は,

$$y-(1-p^2)=\frac{(1-q^2)-(1-p^2)}{q-p}(x-p),\quad y=-(p+q)x+1+pq$$

さて, C と直線 PQ に囲まれた部分の面積を S_1 とすると,

$$S_1=\int_p^q\{1-x^2+(p+q)x-1-pq\}dx=\int_p^q\{-x^2+(p+q)x-pq\}dx$$

$$=-\int_p^q(x-p)(x-q)dx=\frac{1}{6}(q-p)^3$$



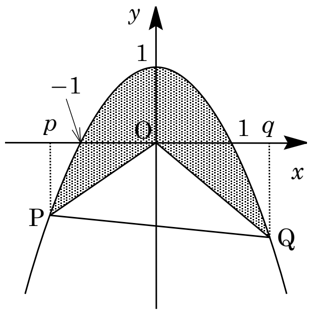
また, △OPQ の面積を S_2 とすると,

$$S_2=\frac{1}{2}\left|q(1-p^2)-p(1-q^2)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|(q-p)+pq(q-p)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|(q-p)(1+pq)\right|=\frac{1}{2}(q-p)\left|1+pq\right|$$

すると, 2 つの線分 OP, OQ と放物線 C で囲まれた部分の面積 S は, 直線 PQ の y 切片に注目し,



(i)　$1+pq\geqq 0$ のとき

$$S=S_1+S_2=\frac{1}{6}(q-p)^3+\frac{1}{2}(q-p)(1+pq)$$

(ii)　$1+pq<0$ のとき

$$S=S_1-S_2=\frac{1}{6}(q-p)^3+\frac{1}{2}(q-p)(1+pq)$$

(i)(ii)より, $S=\frac{1}{6}(q-p)^3+\frac{1}{2}(q-p)(1+pq)=\frac{1}{6}(q-p)(p^2+pq+q^2+3)$

(2)　$q=p+1$ のとき, (1)より, $S=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\{1+p(p+1)\}$ となり,

$$S=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\left\{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}=\frac{1}{2}\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{13}{24}$$

よって, $p=-\frac{1}{2}$ のとき, S は最小値 $\frac{13}{24}$ をとる。

(3)　$pq=-1$ のとき, $p<q$ から, $p<0<q$ であり, (1)より,

$$S=\frac{1}{6}\left(q+\frac{1}{q}\right)^3\geqq\frac{1}{6}\left(2\sqrt{q\cdot\frac{1}{q}}\right)^3=\frac{4}{3}$$

等号は $q=\frac{1}{q}$　$(q=1)$ のとき成立するので, このとき S は最小値 $\frac{4}{3}$ をとる。

［解　説］

面積の標準的な問題ですが, 場合分けをなるべく後回しにしていく工夫が必要です。

4

問題のページへ

点 $\mathrm{A}(2t,\ 2t,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 0,\ t)$ に対して，$\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ から，

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})+(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})\\&=3\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2-2(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\&=3\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}\right|^2-\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2}{3}\end{aligned}$$

条件より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=3$ なので，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}\right|^2=\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2}{9}+1\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}=\left(\dfrac{2}{3}t,\ \dfrac{2}{3}t,\ \dfrac{1}{3}t\right)$ となり，

$$\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2}{9}+1=\frac{1}{9}\{(2t)^2+(2t)^2+t^2\}+1=t^2+1$$

すると，$(*)$から，点 P は中心 $\mathrm{C}\left(\dfrac{2}{3}t,\ \dfrac{2}{3}t,\ \dfrac{1}{3}t\right)$ で半径 $r=\sqrt{t^2+1}$ の球面を描く。

このとき，OP の最大値は 3 なので，$\mathrm{OC}+r=3$ となり，$t>0$ から，

$$\sqrt{\left(\frac{2}{3}t\right)^2+\left(\frac{2}{3}t\right)^2+\left(\frac{1}{3}t\right)^2}+\sqrt{t^2+1}=3\,,\ \ \sqrt{t^2+1}=3-t$$

$0<t<3$ のもとで両辺を 2 乗すると，$t^2+1=9-6t+t^2$ となり，$t=\dfrac{4}{3}$ である。

［解 説］

球面のベクトル方程式が題材です。成分計算を最初から行うのは，得策とはいえません。

5

問題のページへ

(1)　$s_n=\sum_{k=1}^{n}10^{n-k}a_k=10^{n-1}a_1+\cdots+10^2a_{n-2}+10a_{n-1}+a_n$ に対して,

(i)　$n\geqq 2$ のとき

s_n が 4 で割り切れる条件は, 下 2 桁が 4 の倍数であることなので,

$(a_{n-1},\ a_n)=(1,\ 2),\ (3,\ 2),\ (5,\ 2),\ (2,\ 4),\ (4,\ 4),\ (6,\ 4),\ (1,\ 6),$
$(3,\ 6),\ (5,\ 6)$

この確率は, $\dfrac{6^{n-2}\times 9}{6^n}=\dfrac{1}{4}$ である。

(ii)　$n=1$ のとき　s_n が 4 で割り切れる確率は, $\dfrac{1}{6}$ である。

(2)　$n\geqq 2$ のとき, $s_n=10(10^{n-2}a_1+\cdots+10a_{n-2}+a_{n-1})+a_n=10s_{n-1}+a_n$

ここで, s_{n-1} を 6 で割った余りが, それぞれ 0, 1, 2, 3, 4, 5 であるとき, s_n が 6 で割り切れるのは, a_n が順に 6, 2, 4, 6, 2, 4 である場合だけとなる。

s_n が 6 で割り切れる確率を p_n とおくと,

$$p_n=\frac{1}{6}p_{n-1}+\frac{1}{6}(1-p_{n-1})=\frac{1}{6}\ \cdots\cdots\cdots①$$

なお, $p_1=\dfrac{1}{6}$ より, ①は $n=1$ のときも成立している。

(3)　まず, s_{n-1} を 7 で割った余りが 0 であるとき, a_n がどんな値でも s_n が 7 で割り切れる場合はない。

また, s_{n-1} を 7 で割った余りがそれぞれ 1, 2, 3, 4, 5, 6 であるとき, s_n が 7 で割り切れるのは, a_n が順に 4, 1, 5, 2, 6, 3 である場合だけとなる。

s_n が 7 で割り切れる確率を q_n とおくと, $q_1=0$ で,

$$q_n=0\times q_{n-1}+\frac{1}{6}(1-q_{n-1})=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}q_{n-1}$$

変形すると, $q_n-\dfrac{1}{7}=-\dfrac{1}{6}\left(q_{n-1}-\dfrac{1}{7}\right)$ となり,

$$q_n-\frac{1}{7}=\left(q_1-\frac{1}{7}\right)\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}=-\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

よって, $q_n=\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{7}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}\ \cdots\cdots\cdots②$

なお, $q_1=0$ より, ②は $n=1$ のときも成立している。

［解　説］

(1)については, 有名な知見をもとに解きましたが, それと同じ立脚点では, 続く設問に対して難攻します。考え方の融通無碍な切り換えの要求されるところが, 最大の難所となっています。