1

解答解説のページへ

$a-b-8$ と $b-c-8$ が素数となるような素数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。

2　解答解説のページへ

$0<t<1$ とし，放物線 $C: y=x^2$ 上の点 $(t,\ t^2)$ における接線を l とする。C と l と x 軸で囲まれる部分の面積を S_1 とし，C と l と直線 $x=1$ で囲まれる部分の面積を S_2 とする。S_1+S_2 の最小値を求めよ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

円 $C : x^2 + y^2 = 1$ 上の点 P における接線を l とする。点 $(1,\ 0)$ を通り l と平行な直線を m とする。直線 m と円 C の $(1,\ 0)$ 以外の共有点を P' とする。ただし, m が直線 $x = 1$ のときは P' を $(1,\ 0)$ とする。

円 C 上の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ から点 $\mathrm{P}'(s',\ t')$ を得る上記の操作を T と呼ぶ。

(1)　s'，t' をそれぞれ s と t の多項式として表せ。

(2)　点 P に操作 T を n 回繰り返して得られる点を P_n とおく。P が $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ のとき, P_1，P_2，P_3 を図示せよ。

(3)　正の整数 n について，$\mathrm{P}_n = \mathrm{P}$ となるような点 P の個数を求めよ。

4

解答解説のページへ

半径 1 の球が直円錐に内接している。この直円錐の底面の半径を r とし，表面積を S とする。

(1) S を r を用いて表せ。

(2) S の最小値を求めよ。

5

解答解説のページへ

数直線上の点 P を次の規則で移動させる。1 枚の硬貨を投げて，表が出れば P を $+1$だけ移動させ，裏が出れば P を原点に関して対称な点に移動させる。P は初め原点にあるとし，硬貨を n 回投げた後の P の座標を a_n とする。

(1)　$a_3 = 0$ となる確率を求めよ。

(2)　$a_4 = 1$ となる確率を求めよ。

(3)　$n \geqq 3$ のとき，$a_n = n - 3$ となる確率を n を用いて表せ。

1　　　問題のページへ

素数 a, b, c に対して，条件より，p, q を素数とすると，

$$a-b-8=p\cdots\cdots\cdots①,\ \ b-c-8=q\cdots\cdots\cdots②$$

①より $a-b=p+8>0$，②より $b-c=q+8>0$ となり，$a>b>c$ である。

(i)　$c\neq 2$ のとき

素数 a, b, c はすべて奇数となるので，①②より素数 p, q はともに偶数，すなわち $p=q=2$ である。すると，①②より，

$$a-b=10\cdots\cdots\cdots③,\ \ b-c=10\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$a=c+20=c+3\times6+2$，$b=c+10=c+3\times3+1$ となり，すなわち a, b, c を 3 で割った余りはすべて異なり，素数 a, b, c のいずれかは 3 の倍数である。

よって，$c=3$，$b=13$，$a=23$

(ii)　$c=2$ のとき

素数 $a,\ b$ はともに奇数となるので，①より素数 p は偶数，すなわち $p=2$ である。また，②より素数 q は奇数である。すると，①②より，

$$a-b=10\cdots\cdots\cdots⑤,\ \ b-10=q\cdots\cdots\cdots⑥$$

⑤⑥より，$a=q+20$，$b=q+10$ となり，$a>b>q$ である。そして，(i)と同様にすると，素数 a, b, q のいずれかは 3 の倍数である。

よって，$q=3$，$b=13$，$a=23$

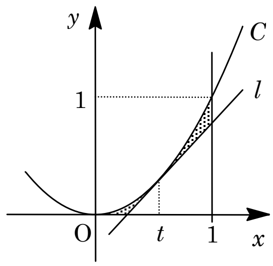
(i)(ii)より，$(a,\ b,\ c)=(23,\ 13,\ 3)$，$(23,\ 13,\ 2)$

［解　説］

定番の整数問題です。よく利用される「素数で偶数なのは 2 だけ」ということが，最初のポイントです。なお，解答例では省きましたが，③④を導いたあと実験をして，3 で割った余りに着目をしました。

$\boxed{2}$

問題のページへ



$C: y=x^2$ より $y'=2x$ となり，$0<t<1$ において，点$(t,\ t^2)$における接線 l は,

$$y-t^2=2t(x-t),\ \ y=2tx-t^2 \cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで, l と x 軸の交点は, $(*)$より,

$$2tx-t^2=0,\ \ x=\frac{t}{2}$$

また, l と直線 $x=1$ との交点は, $(*)$より, $y=2t-t^2$

すると, C と l と x 軸で囲まれる部分の面積 S_1, C と l と直線 $x=1$ で囲まれる部分の面積 S_2 に対して, $S=S_1+S_2$ とおくと,

$$S=\int_0^1 x^2\,dx-\frac{1}{2}\Big(1-\frac{t}{2}\Big)(2t-t^2)=-\frac{1}{4}t(t-2)^2+\frac{1}{3}=-\frac{1}{4}t^3+t^2-t+\frac{1}{3}$$

$$S'=-\frac{3}{4}t^2+2t-1=-\frac{1}{4}(3t-2)(t-2)$$

すると，$0<t<1$ における $S=S_1+S_2$ の増減は右表のようになり，S は $t=\dfrac{2}{3}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{27}$ をとる。

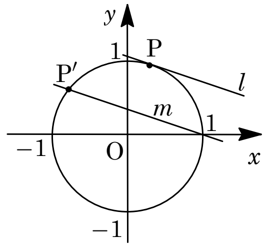
t	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
S'		$-$	0	$+$	
S		$\searrow$	$\frac{1}{27}$	$\nearrow$	

［解 説］

微積分の超基本かつ超頻出題です。

3

問題のページへ



(1)　円 $x^2+y^2=1$ ……①上の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ における接線 l と平行で，点 $(1,\ 0)$ を通る直線 m の方程式は，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(s,\ t)$ より，

$$s(x-1)+ty=0 \cdots\cdots\text{②}$$

ここで，$t\neq 0$ のときは，②より $y=-\dfrac{s}{t}(x-1)$ となり，①に代入すると，

$$x^2+\frac{s^2}{t^2}(x-1)^2=1\,,\ \ t^2(x^2-1)+s^2(x-1)^2=0$$

$$(x-1)\{(s^2+t^2)x-(s^2-t^2)\}=0$$

$x\neq 1$ のとき，$x=\dfrac{s^2-t^2}{s^2+t^2}$ となり，$y=-\dfrac{s}{t}\left(\dfrac{s^2-t^2}{s^2+t^2}-1\right)=\dfrac{2st}{s^2+t^2}$

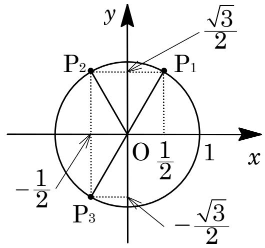
すると，$s^2+t^2=1$ から，$x=s^2-t^2$，$y=2st$ となり，$\mathrm{P}'(s',\ t')$ は，

$$s'=s^2-t^2\,,\ \ t'=2st \cdots\cdots\text{③}$$

なお，$t=0$ のときは $s=\pm 1$ から，$(s',\ t')=(1,\ 0)$ となり条件を満たす。

(2)　まず，$s=\cos\theta$，$t=\sin\theta$ とおくと，③より，

$$s'=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos 2\theta\,,\ \ t'=2\cos\theta\sin\theta=\sin 2\theta$$



点 P が $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)=\left(\cos\dfrac{\pi}{6},\ \sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ のとき，

$$\mathrm{P}_1\left(\cos\frac{\pi}{3},\ \sin\frac{\pi}{3}\right),\ \ \mathrm{P}_2\left(\cos\frac{2}{3}\pi,\ \sin\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$\mathrm{P}_3\left(\cos\frac{4}{3}\pi,\ \sin\frac{4}{3}\pi\right)$$

よって，P_1，P_2，P_3 を図示すると，右図のようになる。

(3)　$0\leqq\theta<2\pi$ として，$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とおくと，(2)から $\mathrm{P}_1(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$ となり，さらに $\mathrm{P}_2(\cos 4\theta,\ \sin 4\theta)$，$\mathrm{P}_3(\cos 8\theta,\ \sin 8\theta)$ から，帰納的に $\mathrm{P}_n(\cos 2^n\theta,\ \sin 2^n\theta)$ と表すことができる。

ここで，$\mathrm{P}_n=\mathrm{P}$ のとき，k を整数として，$2^n\theta=\theta+2k\pi$ なので，

$$(2^n-1)\theta=2k\pi\,,\ \ \theta=\frac{2k\pi}{2^n-1}$$

すると，$0\leqq\dfrac{2k\pi}{2^n-1}<2\pi$ より，$0\leqq 2k\pi<2\pi(2^n-1)$，$0\leqq k<2^n-1$

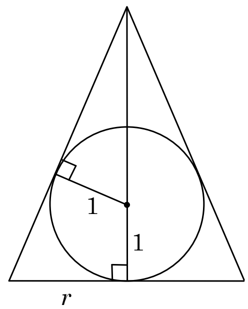
よって，$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 2^n-2$ から，$\mathrm{P}_n=\mathrm{P}$ となる点 P は 2^n-1 個ある。

［解　説］

図形的な条件を三角関数の列へとつなぐ問題です。(3)は題意が把握しにくいので，$n=1,\ 2,\ \cdots$ と具体例を考え，方針を立てました。

4

問題のページへ



(1)　半径 1 の球が内接している直円錐を，軸を含む平面で切断した切り口は右図のようになる。

ここで，直円錐の高さを h とおくと，

$$\frac{1}{h-1}=\frac{r}{\sqrt{h^2+r^2}},\quad h^2+r^2=r^2(h-1)^2$$

すると，$(r^2-1)h=2r^2$ より，$h=\dfrac{2r^2}{r^2-1}$

これより，直円錐の表面積 S は,

$$S=\pi r^2+\frac{1}{2}\sqrt{h^2+r^2}\cdot 2\pi r=\pi r^2+r(h-1)\cdot\pi r=\pi r^2 h=\frac{2\pi r^4}{r^2-1}$$

(2)　$r>1$ より $r^2-1>0$ となり，(1)から，

$$S=2\pi\left(r^2+1+\frac{1}{r^2-1}\right)=2\pi\left(r^2-1+\frac{1}{r^2-1}+2\right)$$

ここで，相加平均と相乗平均の関係より，$r^2-1+\dfrac{1}{r^2-1}\geqq 2$

なお，等号は $r^2-1=\dfrac{1}{r^2-1}$，すなわち $r^2=2\ (r=\sqrt{2})$ のとき成立する。

よって，S の最小値は，$2\pi(2+2)=8\pi$ である。

［解 説］

立体の基本的な問題です。(2)では分数関数が現れましたので，相加平均と相乗平均の出番です。

5

問題のページへ

(1)　1 枚の硬貨を投げて表，裏が出る確率は，それぞれ$\frac{1}{2}$ずつとする。

$a_3=0$ となるのは，表→裏→表または裏→裏→裏のいずれかより，その確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3\times 2=\frac{1}{4}$$

(2)　$a_4=1$ となるのは，次の 2 つの場合がある。

(i)　$a_3=0$ で 4 回目に表が出る場合

この場合の確率は，(1)より，$\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$ となる。

(ii)　$a_3=-1$ で 4 回目に裏が出る場合

$a_3=-1$ となるのは裏→表→裏のときだけであり，これよりこの場合の確率は，$\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$ となる。

(i)(ii)より，$a_4=1$ となる確率は，$\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{3}{16}$ である。

(3)　$a_n=n-3$ $(n\geqq 3)$ となるのは，次の 2 つの場合があり，その確率 p_n について，

(i)　$a_{n-1}=n-4$ で n 回目に表が出る場合

この場合の確率は，$p_{n-1}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}p_{n-1}$ となる。

(ii)　$a_{n-1}=-n+3$ で n 回目に裏が出る場合

まず，$-n+3\leqq a_{n-2}\leqq n-2$ なので，$a_{n-1}=-n+3$ となるのは，$a_{n-2}=n-3$ で $n-1$ 回目に裏が出る場合だけ，すなわち裏→表→表→…→表→裏と 1 回目と $n-1$ 回目に裏が出て，それ以外は表が出る場合である。

n 回目は裏が出ることより，この場合の確率は，$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\times\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ となる。

(i)(ii)より，$p_n=\frac{1}{2}p_{n-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^n$ $(n\geqq 4)$ ………(＊)

すると，(＊)より，$2^np_n=2^{n-1}p_{n-1}+1$ となり，$p_3=\frac{1}{4}$ から，

$$2^np_n=2^3p_3+(n-3)=8\cdot\frac{1}{4}+n-3=n-1$$

よって，$p_n=\frac{n-1}{2^n}$ $(n\geqq 3)$ である。

［解　説］

(1)と(2)が, (3)の漸化式を立式するための誘導となっています。特に, (ii)の場合に注意深さが要求されます。解答例では省きましたが，$a_5=2$ のときも考えて，一般化しています。