1

解答解説のページへ

n を 2 以上の整数とする。n 以下の正の整数のうち, n との最大公約数が 1 となるものの個数を $E(n)$ で表す。たとえば, $E(2)=1$, $E(3)=2$, $E(4)=2$, $\cdots$, $E(10)=4$, $\cdots$ である。

(1) $E(1024)$ を求めよ。

(2) $E(2015)$ を求めよ。

(3) m を正の整数とし, p と q を異なる素数とする。$n=p^m q^m$ のとき $\dfrac{E(n)}{n} \geqq \dfrac{1}{3}$ が成り立つことを示せ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

座標平面上の原点を O とする。点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$，点 $\mathrm{B}(0,\ b)$ および点 C が，$\mathrm{OC}=1$，$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}$ を満たしながら動く。

(1)　$s=a^2+b^2$，$t=ab$ とする。s と t の関係を表す等式を求めよ。

(2)　$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積のとりうる値の範囲を求めよ。

3

解答解説のページへ

n を 4 以上の整数とする。正 n 角形の 2 つの頂点を無作為に選び，それらを通る直線を l とする。さらに，残りの $n-2$ 個の頂点から 2 つの頂点を無作為に選び，それらを通る直線を m とする。直線 l と m が平行になる確率を求めよ。

4

解答解説のページへ

xyz 空間において，原点を中心とする xy 平面上の半径 1 の円周上を点 P が動き，点 $(0,\ 0,\ \sqrt{3})$ を中心とする xz 平面上の半径 1 の円周上を点 Q が動く。

(1) 線分 PQ の長さの最小値と，そのときの点 P, Q の座標を求めよ。

(2) 線分 PQ の長さの最大値と，そのときの点 P, Q の座標を求めよ。

5a

解答解説のページへ

数列$\{a_k\}$を$a_k = k + \cos\left(\dfrac{k\pi}{6}\right)$で定める。$n$を正の整数とする。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{12n} a_k$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{12n} {a_k}^2$ を求めよ。

5b　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　解答解説のページへ

$a,\ b,\ c$ は異なる 3 つの正の整数とする。次のデータは 2 つの科目 X と Y の試験を受けた 10 人の得点をまとめたものである。

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
科目 X の得点	a	c	a	b	b	a	c	c	b	c
科目 Y の得点	a	b	b	b	a	a	b	a	b	a

科目 X の得点の平均値と科目 Y の得点の平均値とは等しいとする。

(1)　科目 X の得点の分散を ${s_{\mathrm{X}}}^2$, 科目 Y の得点の分散を ${s_{\mathrm{Y}}}^2$ とする。$\dfrac{{s_{\mathrm{X}}}^2}{{s_{\mathrm{Y}}}^2}$ を求めよ。

(2)　科目 X の得点と科目 Y の得点の相関係数を，四捨五入して小数第 1 位まで求めよ。

(3)　科目 X の得点の中央値が 65, 科目 Y の得点の標準偏差が 11 であるとき，$a,\ b,\ c$ の組を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　条件より，$E(n)$ は n と互いに素な n 以下の正の整数の個数である。

まず，$1024=2^{10}$ より，1024 と互いに素でない正の整数は 2 の倍数となり，その 1024 以下の個数は $\dfrac{1024}{2}=512$ である。これより，

$$E(1024)=1024-512=512$$

(2)　$2015=5\times13\times31$ より，2015 と互いに素でない正の整数は，5 の倍数または 13 の倍数または 31 の倍数となる。その 2015 以下の個数は，

$$\frac{2015}{5}+\frac{2015}{13}+\frac{2015}{31}-\frac{2015}{5\times13}-\frac{2015}{5\times31}-\frac{2015}{13\times31}+\frac{2015}{5\times13\times31}$$

$$=403+155+65-31-13-5+1=575$$

よって，$E(2015)=2015-575=1440$

(3)　m を正の整数, p と q を異なる素数とし，$n=p^mq^m$ のとき，p^mq^m と互いに素でない正の整数は, p の倍数または q の倍数となる。その p^mq^m 以下の個数は,

$$\frac{p^mq^m}{p}+\frac{p^mq^m}{q}-\frac{p^mq^m}{pq}=p^{m-1}q^m+p^mq^{m-1}-p^{m-1}q^{m-1}$$

すると，$E(n)=p^mq^m-(p^{m-1}q^m+p^mq^{m-1}-p^{m-1}q^{m-1})$ となり，

$$3E(n)-n=3p^mq^m-3(p^{m-1}q^m+p^mq^{m-1}-p^{m-1}q^{m-1})-p^mq^m$$

$$=p^{m-1}q^{m-1}(2pq-3p-3q+3)$$

ここで，$2pq-3p-3q+3=\dfrac{1}{2}(4pq-6p-6q+6)=\dfrac{1}{2}\{(2p-3)(2q-3)-3\}$

この式は p, q について対等なので，$p<q$ とすると，$p\geqq2$，$q\geqq3$ となり，

$$(2p-3)(2q-3)-3\geqq1\times3-3=0$$

よって，$3E(n)-n\geqq0$ となり，$\dfrac{E(n)}{n}\geqq\dfrac{1}{3}$ が成り立つ。

［解 説］

互いに素ということを題材とした整数問題です。(3)では，証明する不等式を事前に同値変形していますが，必須というわけではありません。なお，2015 の素因数分解は気づきにくいので，どこかで出題されるだろうと思っていましたが……。

2

問題のページへ

(1)　C$(p,\ q)$とおくと，OC$=1$から，$p^2+q^2=1$ ………①

また，A$(a,\ 0)$，B$(0,\ b)$に対し，AB$=$BC$=$CA より，

$$a^2+b^2=p^2+(q-b)^2 \cdots\cdots\cdots ②,\quad a^2+b^2=(p-a)^2+q^2 \cdots\cdots\cdots ③$$

①②より，$a^2=1-2bq$ となり，$b\neq 0$ のとき $q=\dfrac{1-a^2}{2b}$ ………④

①③より，$b^2=1-2ap$ となり，$a\neq 0$ のとき $p=\dfrac{1-b^2}{2a}$ ………⑤

④⑤を①に代入すると，$\dfrac{(1-b^2)^2}{4a^2}+\dfrac{(1-a^2)^2}{4b^2}=1$ となり，

$$b^2(1-b^2)^2+a^2(1-a^2)^2=4a^2b^2 \cdots\cdots\cdots ⑥$$

なお，$b=0$ のときは $a=\pm 1$，$a=0$ のときは $b=\pm 1$ となるが，この場合も⑥はともに成立し，左辺を展開すると，

$$a^6+b^6-2(a^4+b^4)+a^2+b^2=4a^2b^2$$

ここで，$s=a^2+b^2$，$t=ab$ とすると，

$$s^3-3t^2s-2(s^2-2t^2)+s=4t^2,\ s(s^2-3t^2-2s+1)=0$$

$s=0$ のとき $a=b=0$，そして②から $p=q=0$ となり不適なので，$s\neq 0$ から，

$$s^2-3t^2-2s+1=0 \cdots\cdots\cdots ⑦$$

(2)　△ABC は正三角形なので，その面積を S とおくと，

$$S=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2)=\frac{\sqrt{3}}{4}s \cdots\cdots\cdots ⑧$$

さて，⑦より $(s-1)^2-3t^2=0$ から，$s=1\pm\sqrt{3}t$ ………⑨

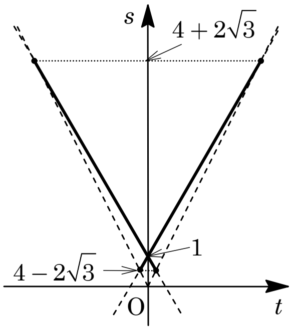
また，$s=(a+b)^2-2ab$ から，$(a+b)^2=s+2t$ となり，$s+2t\geqq 0$ ……⑩で，

$$a+b=\pm\sqrt{s+2t}$$

すると，a，b は，2 次方程式 $x^2\mp\sqrt{s+2t}\,x+t=0$ の 2 つの解となり，

$$D=(s+2t)-4t=s-2t\geqq 0 \cdots\cdots\cdots ⑪$$

⑨かつ⑩かつ⑪を ts 平面上に図示すると，右図の実線部となる。



これより，$4-2\sqrt{3}\leqq s\leqq 4+2\sqrt{3}$ となり，⑧から，

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(4-2\sqrt{3})\leqq S\leqq\frac{\sqrt{3}}{4}(4+2\sqrt{3}),\ \sqrt{3}-\frac{3}{2}\leqq S\leqq\sqrt{3}+\frac{3}{2}$$

［解 説］

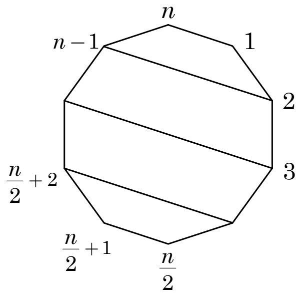
(2)では図をかいて s の範囲を求めましたが，⑨より t を消去しても可能です。

3　問題のページへ

直線 l の決め方が ${}_n\mathrm{C}_2$ 通り，直線 m の決め方が ${}_{n-2}\mathrm{C}_2$ 通りより，l, m の決め方 ${}_n\mathrm{C}_2\cdot{}_{n-2}\mathrm{C}_2=\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}$ 通りが同様に確からしいとする。また，正 n 角形の頂点に番号をつけ，辺や対角線を両端の頂点番号の組として表す。

(I)　n が偶数のとき

(i)　l と m がともに 1 つの辺に平行なとき



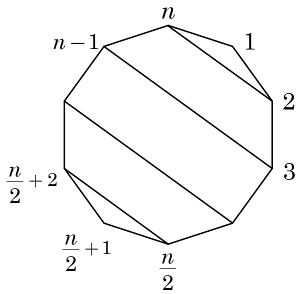
n と 1 を結んだ辺に対して平行線をかくと，

$$(n,\ 1),\ (n-1,\ 2),\ \cdots,\ \left(\frac{n}{2}+1,\ \frac{n}{2}\right)$$

この中から，l と m として，2 本選ぶことより，${}_{\frac{n}{2}}\mathrm{C}_2\times 2=\dfrac{n}{2}\left(\dfrac{n}{2}-1\right)$ 通りとなる。このような平行線のパターンは重複を考えると $\dfrac{n}{2}$ 通りあり，合わせて，

$$\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\frac{n}{2}=\frac{n^2}{8}(n-2)\ \text{（通り）}$$

(ii)　l と m がともに 1 つの辺に平行でないとき



1 つの頂点をはさんだ対角線となり，n と 2 を結んだ辺に対して平行線をかくと，

$$(n,\ 2),\ (n-1,\ 3),\ \cdots,\ \left(\frac{n}{2}+2,\ \frac{n}{2}\right)$$

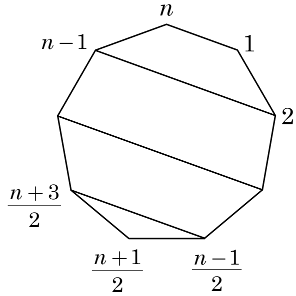
この中から，l と m として，2 本選ぶことより，${}_{\frac{n}{2}-1}\mathrm{C}_2\times 2=\left(\dfrac{n}{2}-1\right)\left(\dfrac{n}{2}-2\right)$ 通りとなる。このような平行線のパターンは重複を考えると $\dfrac{n}{2}$ 通りあり，合わせて，

$$\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)\frac{n}{2}=\frac{n}{8}(n-2)(n-4)\ \text{（通り）}$$

(i)(ii)より，$\dfrac{n^2}{8}(n-2)+\dfrac{n}{8}(n-2)(n-4)=\dfrac{n}{4}(n-2)^2$ 通りとなり，求める確率は，

$$\frac{n}{4}(n-2)^2\cdot\frac{4}{n(n-1)(n-2)(n-3)}=\frac{n-2}{(n-1)(n-3)}$$

(II)　n が奇数のとき



n と 1 を結んだ辺に対して平行線をかくと，

$$(n,\ 1),\ (n-1,\ 2),\ \cdots,\ \left(\frac{n+3}{2},\ \frac{n-1}{2}\right)$$

この中から，l と m として，2 本選ぶことより，${}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_2\times 2=\dfrac{n-1}{2}\left(\dfrac{n-1}{2}-1\right)$ 通りとなる。このような平行線のパターンは n 通りあり，合わせて，

$$\frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2}-1\right)\cdot n=\frac{n}{4}(n-1)(n-3)$$ （通り）

よって，求める確率は，

$$\frac{n}{4}(n-1)(n-3)\cdot\frac{4}{n(n-1)(n-2)(n-3)}=\frac{1}{n-2}$$

［解 説］

単純な設定の問題ですが，小さい n の値で実験していると，かなり時間がかかってしまいました。なお，結果としていえることですが，n が偶数の場合からでなく，奇数の場合から考え始めた方がよかったのではないかという感じがしています。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　原点が中心で xy 平面上の半径 1 の円周上の点 P は，$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ と表せる。ただし $0 \leqq \theta < 2\pi$ である。また，点 $(0,\ 0,\ \sqrt{3})$ が中心で xz 平面上の半径 1 の円周上の点 Q は，$\mathrm{Q}(\cos\varphi,\ 0,\ \sqrt{3}+\sin\varphi)$ と表せる。ただし $0 \leqq \varphi < 2\pi$ である。

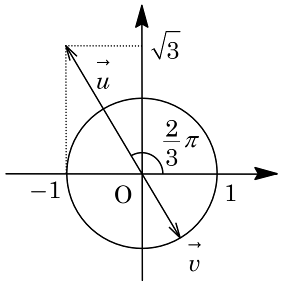
$$\mathrm{PQ}^2 = (\cos\theta - \cos\varphi)^2 + \sin^2\theta + (\sqrt{3}+\sin\varphi)^2$$
$$= 1 - 2\cos\theta\cos\varphi + 1 + 3 + 2\sqrt{3}\sin\varphi = -2\cos\theta\cos\varphi + 2\sqrt{3}\sin\varphi + 5$$

ここで，$\vec{u} = (-\cos\theta,\ \sqrt{3})$，$\vec{v} = (\cos\varphi,\ \sin\varphi)$ とおくと，

$$\mathrm{PQ}^2 = 2\vec{u}\cdot\vec{v} + 5$$

さて，まず θ を $0 \leqq \theta < 2\pi$ で固定して考えると，線分 PQ の長さが最小となるのは，$\vec{v}$ が $\vec{u}$ と逆向きになるときである。このとき PQ^2 の最小値は，

$$2\sqrt{\cos^2\theta + 3}\cdot 1\cdot\cos\pi + 5 = -2\sqrt{\cos^2\theta + 3} + 5$$



さらに，$0 \leqq \cos^2\theta \leqq 1$ から，$\cos\theta = \pm 1$ のとき，PQ^2 は最小値 $-2\sqrt{1+3}+5 = 1$，すなわち PQ は最小値 1 をとる。

(i)　$\cos\theta = 1\ (\theta = 0)$ のとき

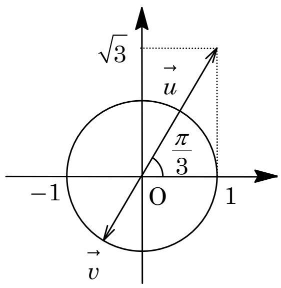
$\vec{u} = (-1,\ \sqrt{3})$ となり，$\varphi = \dfrac{2}{3}\pi + \pi = \dfrac{5}{3}\pi$ となるので，

$$\mathrm{P}(1,\ 0,\ 0),\ \mathrm{Q}\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

(ii)　$\cos\theta = -1\ (\theta = \pi)$ のとき

$\vec{u} = (1,\ \sqrt{3})$ となり，$\varphi = \dfrac{\pi}{3} + \pi = \dfrac{4}{3}\pi$ となるので，

$$\mathrm{P}(-1,\ 0,\ 0),\ \mathrm{Q}\left(-\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



(2)　(1)より，線分 PQ の長さが最大となるのは，$\vec{v}$ が $\vec{u}$ と同じ向きになるときである。このとき PQ^2 の最大値は，

$$2\sqrt{\cos^2\theta + 3}\cdot 1\cdot\cos 0 + 5 = 2\sqrt{\cos^2\theta + 3} + 5$$

さらに $\cos\theta = \pm 1$ のとき，PQ^2 は最大値 $2\sqrt{1+3}+5 = 9$，PQ は最大値 3 をとる。

(i)　$\cos\theta = 1\ (\theta = 0)$ のとき　$\vec{u} = (-1,\ \sqrt{3})$ となり，$\varphi = \dfrac{2}{3}\pi$ となるので，

$$\mathrm{P}(1,\ 0,\ 0),\ \mathrm{Q}\left(-\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$$

(ii)　$\cos\theta = -1\ (\theta = \pi)$ のとき　$\vec{u} = (1,\ \sqrt{3})$ となり，$\varphi = \dfrac{\pi}{3}$ となるので，

$$\mathrm{P}(-1,\ 0,\ 0),\ \mathrm{Q}\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$$

［解　説］

1 文字固定の最大・最小問題です。内積の定義を利用して，図で考えています。

5a

問題のページへ

(1)　$a_k = k + \cos\left(\dfrac{k\pi}{6}\right)$に対し，$b_k = \cos\left(\dfrac{k\pi}{6}\right)$とおくと，

$$\sum_{k=1}^{12n} a_k = \sum_{k=1}^{12n} k + \sum_{k=1}^{12n} b_k = 6n(12n+1) + \sum_{k=1}^{12n} b_k$$

ここで，$s_k = b_{12k-11} + b_{12k-10} + \cdots + b_{12k}$とおくと，$\displaystyle\sum_{k=1}^{12n} b_k = \sum_{k=1}^{n} s_k$となり，

$$s_k = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 0$$

よって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{12n} a_k = 6n(12n+1) + 0 = 6n(12n+1)$

(2)　${a_k}^2 = k^2 + 2k\cos\left(\dfrac{k\pi}{6}\right) + \cos^2\left(\dfrac{k\pi}{6}\right)$に対し，$c_k = k\cos\left(\dfrac{k\pi}{6}\right)$，$d_k = \cos^2\left(\dfrac{k\pi}{6}\right)$とおくと，${a_k}^2 = k^2 + 2c_k + d_k$となり，

$$\sum_{k=1}^{12n} {a_k}^2 = \sum_{k=1}^{12n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{12n} c_k + \sum_{k=1}^{12n} d_k = 2n(12n+1)(24n+1) + 2\sum_{k=1}^{12n} c_k + \sum_{k=1}^{12n} d_k$$

ここで，$t_k = c_{12k-11} + c_{12k-10} + \cdots + c_{12k}$とおくと，$\displaystyle\sum_{k=1}^{12n} c_k = \sum_{k=1}^{n} t_k$となり，

$$\begin{aligned} t_k &= \frac{\sqrt{3}}{2}(12k-11) + \frac{1}{2}(12k-10) + 0 - \frac{1}{2}(12k-8) - \frac{\sqrt{3}}{2}(12k-7) - (12k-6) \\ &\quad - \frac{\sqrt{3}}{2}(12k-5) - \frac{1}{2}(12k-4) + 0 + \frac{1}{2}(12k-2) + \frac{\sqrt{3}}{2}(12k-1) + 12k = 6 \end{aligned}$$

さらに，$u_k = d_{12k-11} + d_{12k-10} + \cdots + d_{12k}$とおくと，$\displaystyle\sum_{k=1}^{12n} d_k = \sum_{k=1}^{n} u_k$となり，

$$u_k = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 1 = 6$$

よって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{12n} {a_k}^2 = 2n(12n+1)(24n+1) + 2\cdot 6n + 6n = 4n(144n^2 + 18n + 5)$

［解　説］

周期性のある数列についての和を求めるものです。選択題のバランスのためか，2つの設問とも$k = 12n$までの和となっており，場合分けは必要なく結論が導けます。

5b

問題のページへ

(1)　科目 X, Y の得点の平均値を，それぞれ$\overline{X}$，$\overline{Y}$とすると，

$$\overline{X}=\frac{1}{10}(3a+3b+4c),\ \overline{Y}=\frac{1}{10}(5a+5b)$$

条件より，$\overline{X}=\overline{Y}$なので，$3a+3b+4c=5a+5b$となり，$2c=a+b$から，

$$\overline{X}=\overline{Y}=c=\frac{a+b}{2}$$

与えられた得点表について，$X-\overline{X}$，$Y-\overline{Y}$を計算し，$p=\dfrac{a-b}{2}$，$q=\dfrac{b-a}{2}$とおくと，右表のようになり，

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
X	a	c	a	b	b	a	c	c	b	c
Y	a	b	b	b	a	a	b	a	b	a
$X-\overline{X}$	p	0	p	q	q	p	0	0	q	0
$Y-\overline{Y}$	p	q	q	q	p	p	q	p	q	p

$$s_{\mathrm{X}}{}^2=\frac{1}{10}(3p^2+3q^2+4\cdot 0)=\frac{3}{5}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2,\ s_{\mathrm{Y}}{}^2=\frac{1}{10}(5p^2+5q^2)=\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

よって，$\dfrac{s_{\mathrm{X}}{}^2}{s_{\mathrm{Y}}{}^2}=\dfrac{3}{5}$となる。

(2)　(1)より，$s_{\mathrm{X}}=\sqrt{\dfrac{3}{5}}\left|\dfrac{a-b}{2}\right|$，$s_{\mathrm{Y}}=\left|\dfrac{a-b}{2}\right|$となり，

$$s_{\mathrm{XY}}=\frac{1}{10}(2p^2+2pq+2q^2+4\cdot 0)=\frac{2}{5}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2-\frac{1}{5}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\frac{1}{5}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

よって，相関係数rは，$r=\dfrac{s_{\mathrm{XY}}}{s_{\mathrm{X}}s_{\mathrm{Y}}}=\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2\cdot\left\{\sqrt{\dfrac{3}{5}}\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2\right\}^{-1}=\dfrac{\sqrt{15}}{15}$

さて，$(3.8)^2<15<4^2$より，$3.8<\sqrt{15}<4$となり，$0.25<\dfrac{\sqrt{15}}{15}<0.27$

したがって，相関係数rの小数第 1 位までの概数は 0.3 である。

(3)　科目 X の得点は，aが 3 人，bが 3 人，cが 4 人で，しかも$c=\dfrac{a+b}{2}$より，10 人の得点の中央値はcである。これより$c=65$となり，$a+b=130$ ………(＊)

また，科目 Y の得点の標準偏差$s_{\mathrm{Y}}=\left|\dfrac{a-b}{2}\right|=11$から，$a-b=\pm 22$ ………(＊＊)

(＊)(＊＊)より，$(a,\ b)=(76,\ 54)$，$(54,\ 76)$となるので，

$$(a,\ b,\ c)=(76,\ 54,\ 65),\ (54,\ 76,\ 65)$$

［解　説］

現行課程で導入された「データの分析」からの出題で，基本的な内容になっています。なお，分散については，2 乗の平均から平均の 2 乗を引いて計算してもよいのですが，そうすると共分散の計算がややこしくなります。