1　解答解説のページへ

$6\cdot 3^{3x}+1=7\cdot 5^{2x}$ を満たす 0 以上の整数 x をすべて求めよ。

2

解答解説のページへ

θを実数とし，数列$\{a_n\}$を

$$a_1=1,\ a_2=\cos\theta,\ a_{n+2}=\frac{3}{2}a_{n+1}-a_n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める。すべてのnについて$a_n=\cos(n-1)\theta$が成り立つとき，$\cos\theta$を求めよ。

3

解答解説のページへ

硬貨が 2 枚ある。最初は 2 枚とも表の状態で置かれている。次の操作を n 回行ったあと，硬貨が 2 枚とも裏になっている確率を求めよ。

［操作］2 枚とも表，または 2 枚とも裏のときには，2 枚の硬貨両方を投げる。表と裏が 1 枚ずつのときには，表になっている硬貨だけを投げる。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

　a を実数とし，$f(x)=x^3-3ax$ とする。区間 $-1\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値を M とする。M の最小値とそのときの a の値を求めよ。

5a

解答解説のページへ

平面上の 2 つのベクトル$\vec{a}$と$\vec{b}$は零ベクトルではなく，$\vec{a}$と$\vec{b}$のなす角度は$60°$である。このとき，$r=\dfrac{|\vec{a}+2\vec{b}|}{|2\vec{a}+\vec{b}|}$のとり得る値の範囲を求めよ。

5b

解答解説のページへ

x は 0 以上の整数である。右の表は 2 つの科目 X と Y の試験を受けた 5 人の得点をまとめたものである。

	①	②	③	④	⑤
科目 X の得点	x	6	4	7	4
科目 Y の得点	9	7	5	10	9

(1)　$2n$ 個の実数 a_1，a_2，…，a_n，b_1，b_2，…，b_n について，$a=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$，$b=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k$ とすると，

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-a)(b_k-b)=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-nab$$

が成り立つことを示せ。

(2)　科目 X の得点と科目 Y の得点の相関係数 r_{XY} を x で表せ。

(3)　x の値を 2 増やして r_{XY} を計算しても値は同じであった。このとき，r_{XY} の値を四捨五入して小数第 1 位まで求めよ。

1　　問題のページへ

x が 0 以上の整数であるとき，方程式 $6\cdot3^{3x}+1=7\cdot5^{2x}$ ……①に対して，

(i)　$x=0$ のとき

①の左辺の値は $6\cdot3^0+1=7$，右辺の値も $7\cdot5^0=7$ となり成立している。

(ii)　$x=1$ のとき

①の左辺の値は $6\cdot3^3+1=163$，右辺の値は $7\cdot5^2=175$ となり成立しない。

(iii)　$x=2$ のとき

①の左辺の値は $6\cdot3^6+1=4375$，右辺の値も $7\cdot5^4=4375$ となり成立している。

(iv)　$x\geqq3$ のとき

①より，$6\cdot27^x+1=7\cdot25^x$ となり，$\left(\dfrac{27}{25}\right)^x+\dfrac{1}{6\cdot25^x}=\dfrac{7}{6}$ ……②から，

$$\left(\frac{27}{25}\right)^x+\frac{1}{6\cdot25^x}>\left(\frac{27}{25}\right)^x=\left(1+\frac{2}{25}\right)^x\geqq\left(1+\frac{2}{25}\right)^3>1+3\cdot\frac{2}{25}=\frac{31}{25}$$

ここで，$\dfrac{31}{25}-\dfrac{7}{6}=\dfrac{186-175}{25\times6}>0$ より $\dfrac{31}{25}>\dfrac{7}{6}$ となり，$\left(\dfrac{27}{25}\right)^x+\dfrac{1}{6\cdot25^x}>\dfrac{7}{6}$

よって，②が成立する 3 以上の整数 x は存在しない。

(i)～(iv)より，①が成立する 0 以上の整数 x は，$x=0$，2 である。

［解　説］

定番の整数問題です。まず，$x=0$ は解というのが，すぐわかります。次に，x が大きな値をとるとき $3^{3x}\gg5^{2x}$ という感覚で式を評価すると，$x=1$ のときには①の右辺の方が大きく，$x=0$ 以外に解がありそうです。そして，$x=2$ という解が見つかるわけです。他にはなさそうなので，その証明をしなくてはいけませんが，解答例では，$a>1$ のとき a^x の値がドンドン大きくなるということに着目し，二項定理を利用しつつ式変形をしています。

2

問題のページへ

漸化式 $a_1=1$，$a_2=\cos\theta$，$a_{n+2}=\frac{3}{2}a_{n+1}-a_n$ ……(＊)を満たす数列$\{a_n\}$に対し，その一般項が$a_n=\cos(n-1)\theta$であるとき，まず(＊)が$n=1$で成立することから，

$$a_3=\frac{3}{2}a_2-a_1,\ \cos2\theta=\frac{3}{2}\cos\theta-1$$

すると，$2\cos^2\theta-1=\frac{3}{2}\cos\theta-1$から，$4\cos^2\theta-3\cos\theta=0$

よって，$\cos\theta=0$または$\cos\theta=\frac{3}{4}$が必要である。

(i)　$\cos\theta=0$のとき

$$a_{n+2}-\frac{3}{2}a_{n+1}+a_n=\cos(n+1)\theta-\frac{3}{2}\cos n\theta+\cos(n-1)\theta$$

$$=\cos n\theta\cos\theta-\sin n\theta\sin\theta-\frac{3}{2}\cos n\theta+\cos n\theta\cos\theta+\sin n\theta\sin\theta=-\frac{3}{2}\cos n\theta$$

すると，(＊)から，すべての n について$\cos n\theta=0$となるが，$n=2$のときに$\cos2\theta=-1$から成立しない。

(ii)　$\cos\theta=\frac{3}{4}$のとき

$$a_{n+2}-\frac{3}{2}a_{n+1}+a_n=\cos(n+1)\theta-\frac{3}{2}\cos n\theta+\cos(n-1)\theta$$

$$=\cos n\theta\cos\theta-\sin n\theta\sin\theta-\frac{3}{2}\cos n\theta+\cos n\theta\cos\theta+\sin n\theta\sin\theta$$

$$=\frac{3}{4}\cos n\theta-\frac{3}{2}\cos n\theta+\frac{3}{4}\cos n\theta=0$$

すると，(＊)はすべてのnについて成立している。

(i)(ii)より，$\cos\theta=\frac{3}{4}$である。

［解　説］

漸化式が題材の問題です。一般項が与えられていますので，まず必要条件を求め，そのあと十分性の確認をしています。なお，(＊)に対して$n=1$，2で必要条件を求め，この段階で$\cos\theta$の値を絞り込んでも構いません。

3

問題のページへ

硬貨を投げて表，裏となる確率がそれぞれ$\dfrac{1}{2}$であるとき，この硬貨 2 枚を投げると，2 枚とも表, 2 枚とも裏の確率はそれぞれ$\dfrac{1}{4}$，表と裏が 1 枚ずつの確率は$\dfrac{1}{2}$となる。

さて，n を 0 以上の整数とし，与えられた操作を n 回行ったあと，2 枚の硬貨の表の枚数が 2 枚, 1 枚, 0 枚である確率をそれぞれ p_n，q_n，r_n とおく。

すると，$p_0=1$，$q_0=r_0=0$ のもとで,

$$q_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{2}q_n+\frac{1}{2}r_n\cdots\cdots\cdots①,\ \ r_{n+1}=\frac{1}{4}p_n+\frac{1}{2}q_n+\frac{1}{4}r_n\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$p_n+q_n+r_n=1$ より，①から $q_{n+1}=\dfrac{1}{2}$ となる。

これより，$n\geqq 1$ において $q_n=\dfrac{1}{2}$ となり，②から,

$$r_{n+1}=\frac{1}{4}p_n+\frac{1}{2}q_n+\frac{1}{4}r_n=\frac{1}{4}(p_n+q_n+r_n)+\frac{1}{4}q_n=\frac{1}{4}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$

よって，$n\geqq 2$ において $r_n=\dfrac{3}{8}$ である。

また，②から $r_1=\dfrac{1}{4}p_0+\dfrac{1}{2}q_0+\dfrac{1}{4}r_0=\dfrac{1}{4}$

以上より，n 回の操作のあと，硬貨が 2 枚とも裏になっている確率 r_n は,

$$r_1=\frac{1}{4},\ \ r_n=\frac{3}{8}\ (n\geqq 2)$$

［解 説］

漸化式と確率の融合問題です。立式はさほど難しくはないのですが，得られた結論が意外なため……。

4

問題のページへ

$f(x)=x^3-3ax$ に対し，$f(-x)=-f(x)$ から，$|f(-x)|=|-f(x)|=|f(x)|$

すると，$-1\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値は，$0\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値に等しい。以下，$0\leqq x\leqq 1$ で考える。

さて，$f'(x)=3x^2-3a=3(x^2-a)$ より，

(i)　$a\leqq 0$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ において，$f(x)$ は単調増加し，$|f(x)|$ の最大値 M は，

$$M=|f(1)|=f(1)=1-3a$$

x	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$1-3a$

(ii)　$a>0$ のとき

$f'(x)=3(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})$ となり，$x\geqq 0$ における $f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-2a\sqrt{a}$	$\nearrow$

(ii-i)　$0<\sqrt{a}<1$ $(0<a<1)$ のとき

まず一般的に，X と Y の小さくない方を $\max\{X,\ Y\}$ と表すと，$0\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値 M は，

$$M=\max\{|f(\sqrt{a})|,\ |f(1)|\}=\max\{2a\sqrt{a},\ |1-3a|\}$$

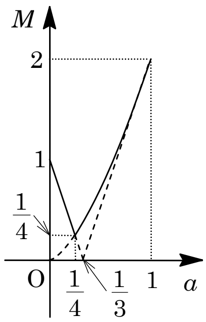
ここで，$2a\sqrt{a}=|1-3a|$ として，両辺を 2 乗すると，

$$4a^3=(1-3a)^2,\ 4a^3-9a^2+6a-1=0$$

すると，$(4a-1)(a-1)^2=0$ から，$a=\dfrac{1}{4},\ 1$

これより，a と M の関係は右図の実線のようになり，

$$M=1-3a\left(0<a<\frac{1}{4}\right),\ M=2a\sqrt{a}\left(\frac{1}{4}\leqq a<1\right)$$



(ii-ii)　$\sqrt{a}\geqq 1$ $(a\geqq 1)$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ において，$f(x)$ は単調減少し，$|f(x)|$ の最大値 M は，

$$M=|f(1)|=-f(1)=-1+3a$$

(i)(ii)より，$-1\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値 M は，

$$M=1-3a\left(a<\frac{1}{4}\right),\ M=2a\sqrt{a}\left(\frac{1}{4}\leqq a<1\right),\ M=-1+3a\ (a\geqq 1)$$

以上より，M は $a=\dfrac{1}{4}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{4}$ をとる。

［解　説］

関数の最大・最小に関する有名問題です。まったく同じ問題の演習経験があるかもしれません。なお，ポイントは偶関数に気付くことです。

5a　　問題のページへ

$|\vec{a}|=a>0$, $|\vec{b}|=b>0$ とおくと，条件より $\vec{a}\cdot\vec{b}=ab\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}ab$ となり，

$$r=\frac{|\vec{a}+2\vec{b}|}{|2\vec{a}+\vec{b}|}=\sqrt{\frac{|\vec{a}+2\vec{b}|^2}{|2\vec{a}+\vec{b}|^2}}=\sqrt{\frac{|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2}{4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}}=\sqrt{\frac{a^2+2ab+4b^2}{4a^2+2ab+b^2}}$$

ここで，$\dfrac{b}{a}=x>0$ とおくと，$r=\sqrt{\dfrac{1+2x+4x^2}{4+2x+x^2}}$ ………①

さらに，$k=\dfrac{1+2x+4x^2}{4+2x+x^2}$ ……②とおき，$x>0$ の範囲で動くとき，k のとり得る値の範囲を求める。すると，②より，$k(4+2x+x^2)=1+2x+4x^2$ となり，

$$(k-4)x^2+(2k-2)x+(4k-1)=0 \cdots\cdots\cdots ③$$

そして，③が $x>0$ に少なくとも 1 つの解をもつ条件から，k の範囲を求めていく。

(i)　$k=4$ のとき

③は，$6x+15=0$ となり，$x>0$ に解をもたないので不適である。

(ii)　$k\neq 4$ のとき

③は，$x^2+\dfrac{2(k-1)}{k-4}x+\dfrac{4k-1}{k-4}=0$，$\left(x+\dfrac{k-1}{k-4}\right)^2+\dfrac{4k-1}{k-4}-\left(\dfrac{k-1}{k-4}\right)^2=0$ となり，

$$\left(x+\frac{k-1}{k-4}\right)^2+\frac{3k^2-15k+3}{(k-4)^2}=0$$

(ii-i)　$-\dfrac{k-1}{k-4}>0\ (1<k<4)$ のとき

求める k の条件は，$\dfrac{3k^2-15k+3}{(k-4)^2}\leqq 0$ となり，$k^2-5k+1\leqq 0$ から，

$$\frac{5-\sqrt{21}}{2}\leqq k\leqq\frac{5+\sqrt{21}}{2}$$

$1<k<4$ との共通範囲は，$\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}<1$，$4<\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}$ から $1<k<4$ である。

(ii-ii)　$-\dfrac{k-1}{k-4}\leqq 0\ (k\leqq 1,\ 4<k)$ のとき

求める k の条件は，$\dfrac{4k-1}{k-4}<0$ となり $\dfrac{1}{4}<k<4$ である。そして，$k\leqq 1$，$4<k$ との共通範囲は，$\dfrac{1}{4}<k\leqq 1$ となる。

(i)(ii)より，k の範囲は $\dfrac{1}{4}<k<4$ となり，r の範囲は，①から $\dfrac{1}{2}<r<2$ である。

［解　説］

ベクトルが題材になっていますが，実質は，分数関数のとり得る値の範囲を求めるとき，実数解条件として処理する方法です。微分法は範囲外ですので。

5b

問題のページへ

(1)　$a=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$，$b=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k$ とするとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=na$，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k=nb$ となり，

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-a)(b_k-b)=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-b\sum_{k=1}^{n}a_k-a\sum_{k=1}^{n}b_k+ab\sum_{k=1}^{n}1$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-nab-nab+nab=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-nab$$

(2)　X, Y の標準偏差をそれぞれ $s_{\rm X}$，$s_{\rm Y}$，X と Y の共分散を $s_{\rm XY}$ とおくと，

$${s_{\rm X}}^2=\frac{1}{5}(x^2+6^2+4^2+7^2+4^2)-\left\{\frac{1}{5}(x+6+4+7+4)\right\}^2$$

$$=\frac{1}{5}(x^2+117)-\left\{\frac{1}{5}(x+21)\right\}^2=\frac{1}{25}(4x^2-42x+144)$$

$${s_{\rm Y}}^2=\frac{1}{5}(9^2+7^2+5^2+10^2+9^2)-\left\{\frac{1}{5}(9+7+5+10+9)\right\}^2=\frac{336}{5}-8^2=\frac{16}{5}$$

また，(1)から，$\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k-a)(b_k-b)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-ab$ となり，

$$s_{\rm XY}=\frac{1}{5}(x\cdot9+6\cdot7+4\cdot5+7\cdot10+4\cdot9)-\frac{1}{5}(x+21)\cdot8$$

$$=\frac{1}{5}(9x+168)-\frac{8}{5}(x+21)=\frac{x}{5}$$

すると，X と Y の相関係数 $r_{\rm XY}$ は，

$$r_{\rm XY}=\frac{s_{\rm XY}}{s_{\rm X}s_{\rm Y}}=\frac{\frac{x}{5}}{\frac{\sqrt{4x^2-42x+144}}{5}\cdot\frac{4}{\sqrt5}}=\frac{\sqrt5x}{4\sqrt{4x^2-42x+144}}$$

(3)　x を $x+2$ としたときの X と Y の相関係数を ${r_{\rm XY}}'$ とすると，(2)から，

$${r_{\rm XY}}'=\frac{\sqrt5(x+2)}{4\sqrt{4(x+2)^2-42(x+2)+144}}=\frac{\sqrt5(x+2)}{4\sqrt{4x^2-26x+76}}$$

$r_{\rm XY}={r_{\rm XY}}'$ より，$x\sqrt{4x^2-26x+76}=(x+2)\sqrt{4x^2-42x+144}$ となり，

$$x^2(4x^2-26x+76)=(x+2)^2(4x^2-42x+144)$$

まとめると，$7x^2-34x-48=0$，$(7x+8)(x-6)=0$ となり，$x=6$ である。

よって，$r_{\rm XY}=\dfrac{6\sqrt5}{4\sqrt{144-252+144}}=\dfrac{\sqrt5}{4}$ となり，小数第 1 位までの概数として表すと，$2.2<\sqrt5<2.3$ から $0.55<\dfrac{\sqrt5}{4}<0.58$ となるので，$r_{\rm XY}=0.6$ である。

［解 説］

誘導つきの相関係数の問題です。たった 5 つのデータについて求めても，という気もしますが，それでも計算はシビアです。