1

解答解説のページへ

実数 a, b は $a \geqq 1$，$b \geqq 1$，$a+b=9$ を満たす。

(1)　$\log_3 a+\log_3 b$ の最大値と最小値を求めよ。

(2)　$\log_2 a+\log_4 b$ の最大値と最小値を求めよ。

2

解答解説のページへ

連立方程式 $x^2 = yz + 7$, $y^2 = zx + 7$, $z^2 = xy + 7$ を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ で $x \leqq y \leqq z$ となるものを求めよ。

3　　解答解説のページへ

$P(0)=1$，$P(x+1)-P(x)=2x$ を満たす整式 $P(x)$ を求めよ。

4

解答解説のページへ

正の実数 $a,\ b,\ c$ は $a+b+c=1$ を満たす。連立不等式 $\left|ax+by\right|\leqq 1$, $\left|cx-by\right|\leqq 1$ の表す xy 平面の領域を D とする。D の面積の最小値を求めよ。

5

解答解説のページへ

xy 平面上の直線 $x=y+1$ を k, yz 平面上の直線 $y=z+1$ を l, xz 平面上の直線 $z=x+1$ を m とする。直線 k 上に点 $\mathrm{P}_1(1,\ 0,\ 0)$ をとる。l 上の点 P_2 を $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\perp l$ となるように定め，m 上の点 P_3 を $\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3\perp m$ となるように定め，k 上の点 P_4 を $\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4\perp k$ となるように定める。以下，同様の手順で l, m, k, l, m, k, $\cdots$ 上の点 P_5, P_6, P_7, P_8, P_9, P_{10}, $\cdots$ を定める。

(1)　点 P_2, P_3 の座標を求めよ。

(2)　線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の長さを n を用いて表せ。

1

問題のページへ

(1)　実数 a, b は，$a\geqq 1$，$b\geqq 1$，$a+b=9$ より，$b=9-a$ $(1\leqq a\leqq 8)$ であるので，$P=\log_3 a+\log_3 b$ とおくと，

$$P=\log_3 a+\log_3(9-a)=\log_3 a(9-a)=\log_3(-a^2+9a)$$

さらに，$f(a)=-a^2+9a$ とおくと，$f(a)=-\left(a-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{81}{4}$ より，$f(a)$ は最大値 $\frac{81}{4}\left(a=\frac{9}{2}\right)$，最小値 $8(a=1,\ 8)$ をとる。

すると，$P=\log_3 f(a)$ から，P は最大値 $\log_3\frac{81}{4}=\log_3 3^4-\log_3 2^2=4-2\log_3 2$，最小値 $\log_3 8=\log_3 2^3=3\log_3 2$ をとる。

(2)　$Q=\log_2 a+\log_4 b=\log_2 a+\frac{1}{2}\log_2 b$ とおくと，

$$Q=\frac{1}{2}\log_2 a^2+\frac{1}{2}\log_2(9-a)=\frac{1}{2}\log_2 a^2(9-a)=\frac{1}{2}\log_2(-a^3+9a^2)$$

さらに，$g(a)=-a^3+9a^2$ とおくと，

$$g'(a)=-3a^2+18a=-3a(a-6)$$

すると，$g(a)$ の増減は右表のようになり，$g(a)$ は最大値 $108(a=6)$，最小値 $8(a=1)$ をとる。

a	1	$\cdots$	6	$\cdots$	8
$g'(a)$		$+$	0	$-$	
$g(a)$	8	$\nearrow$	108	$\searrow$	64

すると，$Q=\frac{1}{2}\log_3 g(a)$ から，Q は最大値 $\frac{1}{2}\log_2 108=\frac{1}{2}\log_2 2^2 3^3=1+\frac{3}{2}\log_2 3$，最小値 $\frac{1}{2}\log_2 8=\frac{1}{2}\log_2 2^3=\frac{3}{2}$ をとる。

［解　説］

対数関数の最大と最小についての基本題です。何か裏があるのかと勘繰ってしまいそうなレベルです。

2

問題のページへ

連立方程式 $x^2=yz+7$ ……①，$y^2=zx+7$ ……②，$z^2=xy+7$ ……③に対して，

①−②より，$x^2-y^2=z(y-x)$，$(x-y)(x+y+z)=0$ ………④

②−③より，$y^2-z^2=x(z-y)$，$(y-z)(x+y+z)=0$ ………⑤

(i)　$x+y+z\neq 0$ のとき

④⑤より $x=y=z$ となり，①に代入すると $x^2=x^2+7$ となり，成立しない。

(ii)　$x+y+z=0$ のとき

④⑤は満たされ，$y=-(x+z)$ として①に代入すると，$x^2=-(x+z)z+7$ となり，

$$x^2+zx+z^2-7=0 \quad \cdots\cdots\cdots ⑥$$

ここで，x は実数より，$D=z^2-4(z^2-7)\geqq 0$ となり，

$$3z^2-28\leqq 0,\ z^2\leqq\frac{28}{3} \quad \cdots\cdots\cdots ⑦$$

さて，整数 x, y, z は，$x+y+z=0$ かつ $x\leqq y\leqq z$ より，$x\leqq 0$，$0\leqq z$ ………⑧

⑦⑧より，$z=0,\ 1,\ 2,\ 3$ となる。

(ii-i)　$z=0$ のとき　⑥より $x^2=7$ となり，x が整数というのに反する。

(ii-ii)　$z=1$ のとき　⑥より $x^2+x-6=0$ となり，$(x+3)(x-2)=0$

⑧から $x=-3$，$y=-(-3+1)=2$ となるが，$x\leqq y\leqq z$ に反する。

(ii-iii)　$z=2$ のとき　⑥より $x^2+2x-3=0$ となり，$(x+3)(x-1)=0$

⑧から $x=-3$，$y=-(-3+2)=1$ となり，$x\leqq y\leqq z$ を満たす。

(ii-iv)　$z=3$ のとき　⑥より $x^2+3x+2=0$ となり，$(x+2)(x+1)=0$

⑧から $x=-2,\ -1$ となる。

$x=-2$ のとき，$y=-(-2+3)=-1$ となり，$x\leqq y\leqq z$ を満たす。

$x=-1$ のとき，$y=-(-1+3)=-2$ となり，$x\leqq y\leqq z$ に反する。

(i)(ii)より，$(x,\ y,\ z)=(-3,\ 1,\ 2)$，$(-2,\ -1,\ 3)$

［解 説］

連立方程式をまとめる問題です。上の解答例では，⑧の条件に着目して，まず y を消去し，0 以上である z の値から求めています。

3

問題のページへ

まず，整式$P(x)$が定数または 1 次式の場合，$P(x+1)-P(x)=2x$ ……(*)は明らかに成立しない。よって，$P(x)$をn次式とすると$n \geqq 2$であり，$P(0)=1$から，

$$P(x)=1+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n \quad (a_n \neq 0)$$

すると，$P(x+1)=1+a_1(x+1)+a_2(x+1)^2+\cdots+a_n(x+1)^n$となり，

$$P(x+1)-P(x)={}_n\mathrm{C}_1a_nx^{n-1}+q(x)$$ （$q(x)$は$n-2$次以下の整式）

これより，$P(x+1)-P(x)$は$n-1$次式となるので，(*)から，

$$n-1=1,\ n=2$$

そこで，$P(x)=1+ax+bx^2\ (b \neq 0)$とおき，(*)に代入すると，

$$1+a(x+1)+b(x+1)^2-(1+ax+bx^2)=2x,\ (a+b)+2bx=2x$$

よって，$a+b=0$，$2b=2$から，$a=-1$，$b=1$となり，$P(x)=1-x+x^2$である。

［解 説］

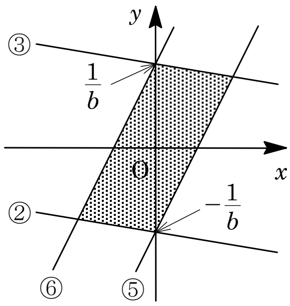
整式$P(x)$に対し，$P(x+1)-P(x)$は$P(x)$より次数が 1 つ下がるという知識があれば，すぐに結論が導けます。つまり，経験がものをいうわけです。

$\boxed{4}$

問題のページへ

$a>0$，$b>0$，$c>0$，$a+b+c=1$に対し，$|ax+by|\leqq 1$ ……①より，

$$-1\leqq ax+by\leqq 1,\ -\frac{a}{b}x-\frac{1}{b}\leqq y\leqq -\frac{a}{b}x+\frac{1}{b}$$



境界線は，$y=-\frac{a}{b}x-\frac{1}{b}$ ……②，$y=-\frac{a}{b}x+\frac{1}{b}$ ……③

また，$|cx-by|\leqq 1$ ……④より，

$$-1\leqq cx-by\leqq 1,\ \frac{c}{b}x-\frac{1}{b}\leqq y\leqq \frac{c}{b}x+\frac{1}{b}$$

境界線は，$y=\frac{c}{b}x-\frac{1}{b}$ ……⑤，$y=\frac{c}{b}x+\frac{1}{b}$ ……⑥

①かつ④の表す領域 D は，直線②と③，および直線⑤と⑥が，平行で，しかも原点対称であることより，右上図の平行四辺形の内部または辺上となる。

そして，直線③と⑤を連立すると，$-\frac{a}{b}x+\frac{1}{b}=\frac{c}{b}x-\frac{1}{b}$ より，

$$(a+c)x=2,\ x=\frac{2}{a+c}$$

よって，領域 D の面積を S とおくと，対称性より，

$$S=2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{b}\cdot\frac{2}{a+c}\right)=\frac{4}{b(a+c)}=\frac{4}{b(1-b)}=\frac{4}{-b^2+b}$$

ここで，$f(b)=-b^2+b$ とおくと，$f(b)=-\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$ より，$0<b<1$ において，

$$0<f(b)\leqq\frac{1}{4}\ \left(\text{等号は}b=\frac{1}{2}\text{のとき成立}\right)$$

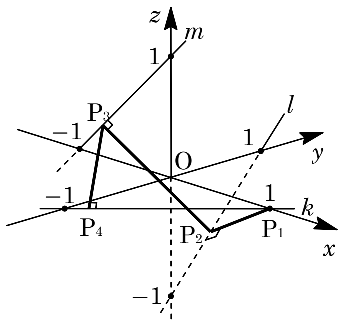
したがって，S は $b=\frac{1}{2}$ のとき最小値 16 をとる。

［解 説］

領域についての問題です。ただ，平行四辺形の 1 つの対角線が y 軸上にあったり，また面積が 1 文字で表せたり，かなり解きやすい設定になっています。

$\boxed{5}$

問題のページへ



(1)　t をパラメータとして，直線 $k,\ l,\ m$ を表すと，

$$k:(x,\ y,\ z)=(0,\ -1,\ 0)+t(1,\ 1,\ 0)=(t,\ t-1,\ 0)$$

$$l:(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ -1)+t(0,\ 1,\ 1)=(0,\ t,\ t-1)$$

$$m:(x,\ y,\ z)=(-1,\ 0,\ 0)+t(1,\ 0,\ 1)=(t-1,\ 0,\ t)$$

さて，k 上の点 $P_1(1,\ 0,\ 0)$ を $P_1(t_1,\ t_1-1,\ 0)$ とおくと，$t_1=1$ となる。

次に，l 上の点 P_2 を $P_2(0,\ t_2,\ t_2-1)$ とおくと，$\overrightarrow{P_1P_2}=(-t_1,\ t_2-t_1+1,\ t_2-1)$ となり，$P_1P_2\perp l$ から，

$$(t_2-t_1+1)+(t_2-1)=0\,,\ t_2=\frac{1}{2}t_1$$

よって，$t_2=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$ から，$P_2\left(0,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$ である。

さらに，m 上の点 P_3 を $P_3(t_3-1,\ 0,\ t_3)$ とおくと，$\overrightarrow{P_2P_3}=(t_3-1,\ -t_2,\ t_3-t_2+1)$ となり，$P_2P_3\perp m$ から，

$$(t_3-1)+(t_3-t_2+1)=0\,,\ t_3=\frac{1}{2}t_2$$

よって，$t_3=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ から，$P_3\left(-\frac{3}{4},\ 0,\ \frac{1}{4}\right)$ である。

(2)　同様に，k 上の点 P_4 を $P_4(t_4,\ t_4-1,\ 0)$ とおくと，$\overrightarrow{P_3P_4}=(t_4-t_3+1,\ t_4-1,\ -t_3)$ となり，$P_3P_4\perp k$ から，

$$(t_4-t_3+1)+(t_4-1)=0\,,\ t_4=\frac{1}{2}t_3$$

よって，$t_4=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$ から，$P_4\left(\frac{1}{8},\ -\frac{7}{8},\ 0\right)$ である。

これより，帰納的に $t_{n+1}=\frac{1}{2}t_n$ ……①となり，$t_1=1$ から $t_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ………②

さて，$L_n=\left|\overrightarrow{P_nP_{n+1}}\right|$ とおくと，(1)より，

$$L_1^{\ 2}=\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|^2=(-t_1)^2+(t_2-t_1+1)^2+(t_2-1)^2$$

$$L_2^{\ 2}=\left|\overrightarrow{P_2P_3}\right|^2=(t_3-1)^2+(-t_2)^2+(t_3-t_2+1)^2$$

$$L_3^{\ 2}=\left|\overrightarrow{P_3P_4}\right|^2=(t_4-t_3+1)^2+(t_4-1)^2+(-t_3)^2$$

すると，いずれの場合も $L_n^{\ 2}$ は同じ式で表せ，①を用いると，帰納的に，

$$L_n^{\ 2}=\left|\overrightarrow{P_nP_{n+1}}\right|^2=(-t_n)^2+(t_{n+1}-t_n+1)^2+(t_{n+1}-1)^2$$

$$=t_n^{\ 2}+\left(\frac{1}{2}t_n-t_n+1\right)^2+\left(\frac{1}{2}t_n-1\right)^2=t_n^{\ 2}+2\left(\frac{1}{2}t_n-1\right)^2=\frac{3}{2}t_n^{\ 2}-2t_n+2$$

②を代入すると，$L_n^2=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2=3\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}+2$ となり，

$$L_n=\sqrt{3\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}+2}$$

［解 説］

空間図形と数列の融合問題です。最初，題意から n を 3 で割った余りで分類し，3 種類のパラメータを設定して処理を行っていたところ，記述量はすさまじいものになりそうでした。ところが，パラメータの値に規則的な変化が見つかり，そこでこの分類を取りやめ，書き改めたのが上の解答例です。