1　解答解説のページへ

正の整数 n の各位の数の和を $S(n)$ で表す。たとえば

$$S(3)=3,\ S(10)=1+0=1,\ S(516)=5+1+6=12$$

である。

(1)　$n \geqq 10000$ のとき，不等式 $n > 30S(n)+2018$ を示せ。

(2)　$n = 30S(n)+2018$ を満たす n を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

$-1 \leqq t \leqq 1$ とし，曲線 $y=\dfrac{x^2-1}{2}$ 上の点 $\left(t,\ \dfrac{t^2-1}{2}\right)$ における接線を l とする。半円 $x^2+y^2=1\ \ (y \leqq 0)$ と l で囲まれた部分の面積を S とする。S のとりうる値の範囲を求めよ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

3 個のさいころを投げる。

(1)　出た目の積が 6 となる確率を求めよ。

(2)　出た目の積が k となる確率が $\dfrac{1}{36}$ であるような k をすべて求めよ。

4

解答解説のページへ

p, q を正の実数とする。原点を O とする座標空間内の 3 点 $\mathrm{P}(p,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{Q}(0,\ q,\ 0)$, $\mathrm{R}(0,\ 0,\ 1)$ は $\angle\mathrm{PRQ} = \dfrac{\pi}{6}$ を満たす。四面体 OPQR の体積の最大値を求めよ。

5

解答解説のページへ

a を実数とし，$f(x)=x-x^3$，$g(x)=a(x-x^2)$ とする。2 つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ は $0<x<1$ の範囲に共有点をもつ。

(1) a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるような a の値を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　k 桁の正の整数 n を，$1 \leqq a_k \leqq 9$，$0 \leqq a_i \leqq 9$ $(1 \leqq i \leqq k-1)$ として，

$$n = a_k \cdot 10^{k-1} + a_{k-1} \cdot 10^{k-2} + \cdots + a_2 \cdot 10 + a_1$$

すると，$n \geqq 10^{k-1}$ ……①であり，$S(n) = a_k + a_{k-1} + \cdots + a_2 + a_1$ から，

$$30S(n) + 2018 \leqq 30 \cdot 9k + 2018 = 270k + 2018 \text{………②}$$

ここで，$n \geqq 10000$ すなわち $k \geqq 5$ のとき，$10^{k-1} > 270k + 2018$ であることを数学的帰納法により証明する。

(i)　$k = 5$ のとき　$10^4 > 270 \cdot 5 + 2018$ より成立する。

(ii)　$k = l$ のとき　$10^{l-1} > 270l + 2018$ と仮定すると，

$$10^l - \{270(l+1) + 2018\} > 2700l + 20180 - (270l + 2288) = 2430l + 17892$$

すると，$l \geqq 5$ のとき $2430l + 17892 > 0$ となるので，$10^l > 270(l+1) + 2018$

よって，$k = l + 1$ のときも成立している。

(i)(ii)より，$k \geqq 5$ のとき，$10^{k-1} > 270k + 2018$ ………③

①②③から，$n \geqq 10000$ のとき，$n > 30S(n) + 2018$ が成立する。

(2)　$n = 30S(n) + 2018$ ……④が成立するのは，(1)より $n \leqq 9999$ の場合となるので，$0 \leqq a \leqq 9$，$0 \leqq b \leqq 9$，$0 \leqq c \leqq 9$，$0 \leqq d \leqq 9$ として，

$$n = 1000a + 100b + 10c + d$$

④より，$1000a + 100b + 10c + d = 30(a + b + c + d) + 2018$ となり，

$$970a + 70b - 20c = 2018 + 29d \text{………⑤}$$

⑤の左辺は 10 の倍数より，右辺も 10 の倍数になることより，$d = 8$ であり，

$$970a + 70b - 20c = 2250,\ 97a + 7b = 225 + 2c \text{………⑥}$$

ここで，⑥から，$225 \leqq 225 + 2c \leqq 243$，$0 \leqq 7b \leqq 63$ より，$a = 2$ である。

すると，$7b = 2c + 31$ ……⑦となり，$31 \leqq 2c + 31 \leqq 49$ から，$b = 5,\ 6,\ 7$ である。

(i)　$b = 5$ のとき　⑦より $4 = 2c$ から $c = 2$

(ii)　$b = 6$ のとき　⑦より $11 = 2c$ から c は存在しない。

(iii)　$b = 7$ のとき　⑦より $18 = 2c$ から $c = 9$

(i)～(iii)より，$(a,\ b,\ c,\ d) = (2,\ 5,\ 2,\ 8)$，$(2,\ 7,\ 9,\ 8)$ となり，

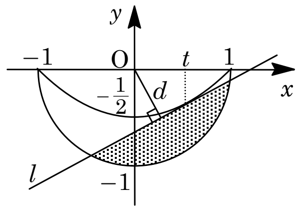
$$n = 2528,\ 2798$$

［解　説］

よく見かける年度絡みの整数問題です。(1)では，証明すべき式の左辺の下を押さえ，右辺の上を押さえ，証明しやすい式にした後，数学的帰納法という流れです。また，(2)はいろいろな解法が考えられます。

2

問題のページへ

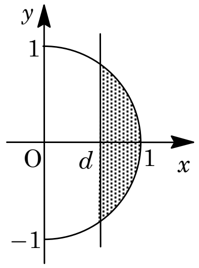


曲線 $y=\dfrac{x^2-1}{2}$ 上の点 $\left(t,\ \dfrac{t^2-1}{2}\right)$ における接線 l の方程式は，$y'=x$ から，

$$y-\frac{t^2-1}{2}=t(x-t),\ \ 2tx-2y-t^2-1=0$$

すると，l と原点との距離 d は，

$$d=\frac{\left|-t^2-1\right|}{\sqrt{4t^2+4}}=\frac{t^2+1}{2\sqrt{t^2+1}}=\frac{\sqrt{t^2+1}}{2}$$



ここで，半円 $x^2+y^2=1\ (y\leqq 0)$ と l で囲まれた部分の面積 S は，右図の網点部の面積に等しく，$-1\leqq t\leqq 1$ のとき $\dfrac{1}{2}\leqq d\leqq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ となることに注意すると，

(i)　$d=\dfrac{1}{2}\ (t=0)$ のとき

単位円と直線 $x=d$ との交点の座標は $\left(\dfrac{1}{2},\ \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ となり，

$$S=2\left(\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

(ii)　$d=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ (t=\pm 1)$ のとき

単位円と直線 $x=d$ との交点の座標は $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ となり，

$$S=2\left(\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

(i)(ii)より，S のとりうる値の範囲は，$\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\leqq S\leqq\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ である。

［解　説］

放物線の接線と円を題材にした基本的な問題です。ポイントは d の値を用いて処理をする点です。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1)　3 個のさいころを投げるとき，出た目を a，b，c $(a \leqq b \leqq c)$ とすると，その積が 6 となるのは，

$$(a,\ b,\ c) = (1,\ 1,\ 6),\ (1,\ 2,\ 3)$$

その確率は，$\dfrac{3!}{2!}\left(\dfrac{1}{6}\right)^3 + 3!\left(\dfrac{1}{6}\right)^3 = (3+6)\left(\dfrac{1}{6}\right)^3 = \dfrac{1}{24}$ である。

(2)　(i)　$a < b < c$ のとき　その確率は $3!\left(\dfrac{1}{6}\right)^3 = \dfrac{1}{36}$ である。

(ii)　$a = b < c$ または $a < b = c$ のとき　その確率は $\dfrac{3!}{2!}\left(\dfrac{1}{6}\right)^3 = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{36}$ である。

(iii)　$a = b = c$ のとき　その確率は $\left(\dfrac{1}{6}\right)^3 = \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{36}$ である。

さて，出た目の積が k となる確率が $\dfrac{1}{36}$ であるのは，次の(I), (II)の場合である。

(I)　$(a,\ b,\ c)$ の組合せが(i)の場合だけで，しかも 1 種類しかない場合

(II)　$(a,\ b,\ c)$ の組合せが(ii)の場合だけで，しかも 2 種類しかない場合

まず，(i)の場合は ${}_6\mathrm{C}_3 = 20$ 通りある。この中で 3 数の積が等しくなる組合せがあるものには二重の下線をつけ，また(ii)または(iii)の組合せとして表せるものは波形の下線をつけると以下のようになる。

$(1,\ 2,\ 3)$，$(1,\ 2,\ 4)$，$(1,\ 2,\ 5)$，$\underline{\underline{(1,\ 2,\ 6)}}$，$\underline{\underline{(1,\ 3,\ 4)}}$，$(1,\ 3,\ 5)$

$(1,\ 3,\ 6)$，$(1,\ 4,\ 5)$，$\underline{\underline{(1,\ 4,\ 6)}}$，$\underline{\underline{(1,\ 5,\ 6)}}$，$\underline{\underline{(2,\ 3,\ 4)}}$，$\underline{\underline{(2,\ 3,\ 5)}}$

$(2,\ 3,\ 6)$，$(2,\ 4,\ 5)$，$(2,\ 4,\ 6)$，$\underline{\underline{(2,\ 5,\ 6)}}$，$\underline{\underline{(3,\ 4,\ 5)}}$，$(3,\ 4,\ 6)$

$(3,\ 5,\ 6)$，$(4,\ 5,\ 6)$

これより，求める場合は下線をつけていない組合せであり，このときの 3 数の積 k の値は，

$$k = 10,\ 15,\ 40,\ 90,\ 120$$

次に，(ii)または(iii)の場合は ${}_6\mathrm{C}_2 \times 2 + {}_6\mathrm{C}_1 = 36$ 通りある。この中の(ii)の場合で，3 数の積が等しくなる組合せが 2 種類だけあるものに下線をつけると，

$(1,\ 1,\ 1)$，$\underline{(1,\ 2,\ 2)}$，$(1,\ 3,\ 3)$，$\underline{(1,\ 4,\ 4)}$，$(1,\ 5,\ 5)$，$(1,\ 6,\ 6)$

$(1,\ 1,\ 2)$，$(2,\ 2,\ 2)$，$(2,\ 3,\ 3)$，$(2,\ 4,\ 4)$，$(2,\ 5,\ 5)$，$(2,\ 6,\ 6)$

$(1,\ 1,\ 3)$，$(2,\ 2,\ 3)$，$(3,\ 3,\ 3)$，$(3,\ 4,\ 4)$，$(3,\ 5,\ 5)$，$(3,\ 6,\ 6)$

$\underline{(1,\ 1,\ 4)}$，$\underline{(2,\ 2,\ 4)}$，$(3,\ 3,\ 4)$，$(4,\ 4,\ 4)$，$(4,\ 5,\ 5)$，$(4,\ 6,\ 6)$

$(1,\ 1,\ 5)$，$(2,\ 2,\ 5)$，$(3,\ 3,\ 5)$，$(4,\ 4,\ 5)$，$(5,\ 5,\ 5)$，$(5,\ 6,\ 6)$

$(1,\ 1,\ 6)$，$(2,\ 2,\ 6)$，$(3,\ 3,\ 6)$，$(4,\ 4,\ 6)$，$(5,\ 5,\ 6)$，$(6,\ 6,\ 6)$

これより，求める場合は下線の組合せであり，このときの 3 数の積 k の値は，

$$k = 4,\ 16$$

以上より，出た目の積の確率が $\dfrac{1}{36}$ である 3 数の積 k の値は,

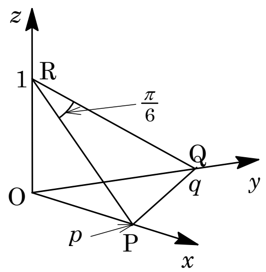
$$k=4,\ 10,\ 15,\ 16,\ 40,\ 90,\ 120$$

［解 説］

シンプルな設定の確率問題ですが, (2)は非常に面倒です。もれを防ぐため, センター試験でよく行うように, 羅列して処理をしました。ただ, 時間はかなりかかり, その間, 集中力を持続しなくてはいけません。

4

問題のページへ



$p>0$, $q>0$ のとき, 3 点 $\mathrm{P}(p,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{Q}(0,\ q,\ 0)$, $\mathrm{R}(0,\ 0,\ 1)$ に対して,

$$\overrightarrow{\mathrm{RP}}=(p,\ 0,\ -1),\ \overrightarrow{\mathrm{RQ}}=(0,\ q,\ -1)$$

ここで, $\angle\mathrm{PRQ}=\frac{\pi}{6}$ より, $\overrightarrow{\mathrm{RP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=|\overrightarrow{\mathrm{RP}}||\overrightarrow{\mathrm{RQ}}|\cos\frac{\pi}{6}$

$$1=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{p^2+1}\sqrt{q^2+1}$$

$$\sqrt{p^2+1}\sqrt{q^2+1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdots\cdots\cdots①$$

また, 四面体 OPQR の体積 V は, $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}pq\cdot 1=\frac{1}{6}pq\cdots\cdots\cdots②$

さて, ①より, $(p^2+1)(q^2+1)=\frac{4}{3}$, $q^2=\frac{4}{3(p^2+1)}-1=\frac{1-3p^2}{3(p^2+1)}\cdots\cdots\cdots③$

そこで, $q>0$ より $q^2>0$ なので $1-3p^2>0$ となり, $p>0$ と合わせると,

$$0<p<\frac{1}{\sqrt{3}}\cdots\cdots\cdots④$$

このとき③より, $p^2q^2=\frac{p^2-3p^4}{3(p^2+1)}=-p^2+\frac{4}{3}+\frac{-4}{3p^2+3}=-\left(p^2+1+\frac{4}{3p^2+3}\right)+\frac{7}{3}$

ここで, 相加平均と相乗平均の関係から,

$$p^2+1+\frac{4}{3p^2+3}\geqq 2\sqrt{(p^2+1)\cdot\frac{4}{3p^2+3}}=2\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

等号が成立するのは, $p^2+1=\frac{4}{3p^2+3}$, $(p^2+1)^2=\frac{4}{3}$, すなわち $p^2=\frac{2}{\sqrt{3}}-1$ のときであるが, この値は④を満たす。

よって, $p^2q^2\leqq-\frac{4\sqrt{3}}{3}+\frac{7}{3}=\frac{7-4\sqrt{3}}{3}$ となり,

$$pq\leqq\sqrt{\frac{7-4\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{7-2\sqrt{12}}}{\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$$

以上より, V の最大値は, ②より $\frac{1}{6}\cdot\frac{2\sqrt{3}-3}{3}=\frac{2\sqrt{3}-3}{18}$ である。

［解　説］

相加平均・相乗平均の関係を利用した最大・最小問題です。なお, 全く同じ内容の問題が, 誘導つきでしたが, 2001 年の第 3 問として出題されています。

5

問題のページへ

(1)　$f(x)=x-x^3$ ……①，$g(x)=a(x-x^2)$ ……②に対して，2 曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点は，$f(x)=g(x)$ から，

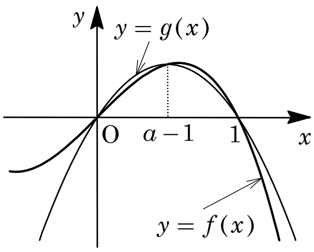
$$x(1+x)(1-x)=ax(1-x)$$

よって，$x=0,\ 1,\ a-1$ となる。

そして，$0<x<1$ の範囲に共有点をもつことより，$0<a-1<1$ となり，

$$1<a<2$$

(2)　$0<a-1<1$ のとき，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなることより，



$$\int_0^{a-1}\{g(x)-f(x)\}dx=\int_{a-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}dx$$

右辺から左辺を引き，

$$\int_{a-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}dx-\int_0^{a-1}\{g(x)-f(x)\}dx$$

$$=\int_{a-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}dx+\int_0^{a-1}\{f(x)-g(x)\}dx=\int_0^{1}\{f(x)-g(x)\}dx$$

よって，$\displaystyle\int_0^{1}\{f(x)-g(x)\}dx=0$ ………(＊)

(＊)から，$\displaystyle\int_0^{1}-\{x^3-ax^2+(a-1)x\}dx=0$ となり，

$$\frac{1}{4}-\frac{a}{3}+\frac{a-1}{2}=0,\ 2a-3=0$$

よって，$a=\dfrac{3}{2}$ となり，この値は $1<a<2$ を満たしている。

［解 説］

定積分と面積に関する超有名問題です。要点は(＊)だけです。