1

解答解説のページへ

p を自然数とする。数列$\{a_n\}$を

$$a_1=1,\ a_2=p^2,\ a_{n+2}=a_{n+1}-a_n+13\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める。数列$\{a_n\}$に平方数でない項が存在することを示せ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

原点を O とする座標平面上の点 Q は円 $x^2+y^2=1$ 上の $x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ の部分を動く。点 Q と点 A$(2,\ 2)$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right)\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を満たす点 P の軌跡を求め，図示せよ。

3

解答解説のページへ

$f(x)=x^3-3x+2$ とする。また，α は 1 より大きい実数とする。曲線 $C: y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(\alpha,\ f(\alpha))$ における接線と x 軸の交点を Q とする。点 Q を通る C の接線の中で傾きが最小のものを l とする。

(1) l と C の接点の x 座標を α の式で表せ。

(2) $\alpha=2$ とする。l と C で囲まれた部分の面積を求めよ。

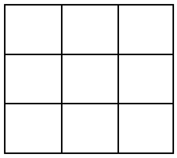
4

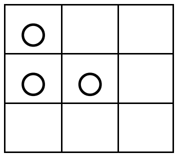
解答解説のページへ

原点を O とする座標平面上に，点$(2,\ 0)$を中心とする半径 2 の円C_1と，点$(1,\ 0)$を中心とする半径 1 の円C_2がある。点 P を中心とする円C_3はC_1に内接し，かつC_2に外接する。ただし，P は x 軸上にないものとする。P を通り x 軸に垂直な直線と x 軸の交点を Q とするとき，三角形 OPQ の面積の最大値を求めよ。

5

解答解説のページへ





右上の図のような縦 3 列横 3 列の 9 個のマスがある。異なる 3 個のマスを選び，それぞれに 1 枚ずつコインを置く。マスの選び方は，どれも同様に確からしいものとする。縦と横の各列について，点数を次のように定める。

- その列に置かれているコインが 1 枚以下のとき, 0 点
- その列に置かれているコインがちょうど 2 枚のとき, 1 点
- その列に置かれているコインが 3 枚のとき, 3 点

縦と横のすべての列の点数の合計を S とする。たとえば，右下の図のようにコインが置かれている場合，縦の 1 列目と横の 2 列目の点数が 1 点，他の列の点数が 0 点であるから，$S=2$ となる。

(1)　$S=3$ となる確率を求めよ。

(2)　$S=1$ となる確率を求めよ。

(3)　$S=2$ となる確率を求めよ。

1

問題のページへ

p を自然数とし，数列$\{a_n\}$に対して，$a_1=1$，$a_2=p^2$，$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n+13$ から，

$$a_3=a_2-a_1+13=p^2-1+13=p^2+12$$

(i)　$p=1$ のとき　$a_3=13$ となり，数列$\{a_n\}$に平方数でない項が存在する。

(ii)　$p=2$ のとき　$a_3=16$，$a_4=16-4+13=25$，$a_5=25-16+13=22$

これより，数列$\{a_n\}$に平方数でない項が存在する。

(iii)　$p=3$ のとき　$a_3=21$ となり，数列$\{a_n\}$に平方数でない項が存在する。

(iv)　$p=4$ のとき　$a_3=28$ となり，数列$\{a_n\}$に平方数でない項が存在する。

(v)　$p=5$ のとき　$a_3=37$ となり，数列$\{a_n\}$に平方数でない項が存在する。

(vi)　$p\geqq 6$ のとき　$12<2p+1$ なので，$p^2+12<p^2+2p+1=(p+1)^2$ となり，

$$p^2<a_3<(p+1)^2$$

これより，a_3 は平方数でなく，数列$\{a_n\}$に平方数でない項が存在する。

(i)～(vi)より，数列$\{a_n\}$には平方数でない項が存在する。

［解　説］

整数と漸化式の融合問題です。$a_3=p^2+12$ という式をみて，不等式 $a_3<(p+1)^2$ を解いた結果, 方針が決まりました。

2

問題のページへ

点 Q は円 $x^2+y^2=1$ 上の $x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ の部分を動くことより，

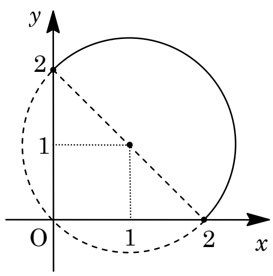
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(\cos\theta,\ \sin\theta)\quad\left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(2,\ 2)$ で，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x,\ y)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}})\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ から，

$$\begin{aligned}(x,\ y)&=(2\cos\theta+2\sin\theta)(\cos\theta,\ \sin\theta)\\&=(2\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta,\ 2\cos\theta\sin\theta+2\sin^2\theta)\\&=(1+\cos 2\theta+\sin 2\theta,\ \sin 2\theta+1-\cos 2\theta)\\&=\left(1+\sqrt{2}\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right),\ 1+\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right)\end{aligned}$$

すると，点 P の軌跡は，中心が点 $(1,\ 1)$ で半径が $\sqrt{2}$ の円周のうち，x 軸の正の向きから測った中心角 $2\theta-\frac{\pi}{4}$ が $-\frac{\pi}{4} \leqq 2\theta-\frac{\pi}{4} \leqq \frac{3}{4}\pi$ を満たす部分である。

図示すると右図の弧（実線部）である。ただし，弧の両端は含む。



［解 説］

与えられた関係式は，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の OQ 方向への正射影ベクトルが $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ ということを表しますが，解答例では，このことを利用せずに，円をパラメータ表示して処理しました。そのため，三角関数の式変形がポイントになっています。

$\boxed{3}$

問題のページへ

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$

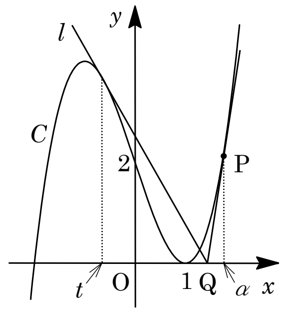
(1)　$f(x)=x^3-3x+2$ に対して,

$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

すると，$f(x)$ の増減は右表のようになる。

さて，$\alpha>1$ として，曲線 $C: y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(\alpha,\ f(\alpha))$ における接線の方程式は,

$$y-(\alpha^3-3\alpha+2)=(3\alpha^2-3)(x-\alpha)$$
$$y=(3\alpha^2-3)x-2\alpha^3+2$$



$y=0$ とすると，$x=\dfrac{2\alpha^3-2}{3\alpha^2-3}=\dfrac{2(\alpha^2+\alpha+1)}{3(\alpha+1)}$ となり,

$$\mathrm{Q}\Big(\frac{2(\alpha^2+\alpha+1)}{3(\alpha+1)},\ 0\Big)$$

さて, l と C の接点の x 座標を $x=t$ $(t<0)$ とおくと, 接線 l の方程式は,

$$y=(3t^2-3)x-2t^3+2$$

x 軸との交点が点 Q より，$t\neq 1$ から，$\dfrac{2(t^2+t+1)}{3(t+1)}=\dfrac{2(\alpha^2+\alpha+1)}{3(\alpha+1)}$ となり,

$$(\alpha+1)(t^2+t+1)=(\alpha^2+\alpha+1)(t+1)$$
$$(\alpha+1)t^2-\alpha^2t-\alpha^2=0\,,\ \{(\alpha+1)t+\alpha\}(t-\alpha)=0$$

よって，$\alpha>1$ から, l と C の接点の x 座標は，$t=-\dfrac{\alpha}{\alpha+1}$ である。

(2)　$\alpha=2$ のとき, (1)から $t=-\dfrac{2}{3}$ となり，$l: y=-\dfrac{5}{3}x+\dfrac{70}{27}$ である。

このとき, C と l の交点の x 座標は，$x^3-3x+2=-\dfrac{5}{3}x+\dfrac{70}{27}$ より,

$$x^3-\frac{4}{3}x-\frac{16}{27}=0\,,\ \Big(x+\frac{2}{3}\Big)^2\Big(x-\frac{4}{3}\Big)=0$$

すると，$x=-\dfrac{2}{3},\ \dfrac{4}{3}$ となり, l と C で囲まれた部分の面積 S は,

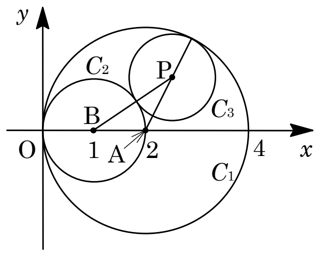
$$S=\int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}}\Big\{-\frac{5}{3}x+\frac{70}{27}-(x^3-3x+2)\Big\}dx=-\int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}}\Big(x+\frac{2}{3}\Big)^2\Big(x-\frac{4}{3}\Big)dx$$
$$=-\int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}}\Big(x+\frac{2}{3}\Big)^2\Big(x+\frac{2}{3}-2\Big)dx=-\int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}}\Big\{\Big(x+\frac{2}{3}\Big)^3-2\Big(x+\frac{2}{3}\Big)^2\Big\}dx$$
$$=-\Big[\frac{1}{4}\Big(x+\frac{2}{3}\Big)^4-\frac{2}{3}\Big(x+\frac{2}{3}\Big)^3\Big]_{-\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}}=-\frac{1}{4}\cdot 2^4+\frac{2}{3}\cdot 2^3=\frac{4}{3}$$

［解　説］

微積分総合の典型題です。(1)では，$\alpha>1$ から位置関係が明確なので，$t<0$ として処理しています。また, (2)の積分はプロセスを記しましたが，準公式です。

4

問題のページへ



点 A(2, 0) を中心とする半径 2 の円 C_1 と，点 B(1, 0) を中心とする半径 1 の円 C_2 がある。

このとき，点 P を中心とする半径 r の円 C_3 が，C_1 に内接し，かつ C_2 に外接することより，

$$\mathrm{AP}=2-r,\ \ \mathrm{BP}=1+r$$

よって，$\mathrm{AP}+\mathrm{BP}=3$ から，$q\neq 0$ で $\mathrm{P}(p,\ q)$ とおくと，

$$\sqrt{(p-2)^2+q^2}+\sqrt{(p-1)^2+q^2}=3$$

$\sqrt{(p-2)^2+q^2}=3-\sqrt{(p-1)^2+q^2}$ として，両辺を 2 乗すると，

$$(p-2)^2+q^2=9-6\sqrt{(p-1)^2+q^2}+(p-1)^2+q^2$$

まとめると，$3\sqrt{(p-1)^2+q^2}=p+3$ となり，さらに両辺を 2 乗すると，

$$9(p-1)^2+9q^2=p^2+6p+9,\ \ 8p^2-24p+9q^2=0$$

これより，$8\left(p-\dfrac{3}{2}\right)^2+9q^2=18$，$\dfrac{\left(p-\frac{3}{2}\right)^2}{\frac{9}{4}}+\dfrac{q^2}{2}=1$ となり，

$$p=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\cos\theta,\ \ q=\sqrt{2}\sin\theta\quad(\sin\theta\neq 0)\cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，P を通り x 軸に垂直な直線と x 軸の交点を Q とし，△OPQ の面積を S とおくと，(*)から，

$$S=\frac{1}{2}|pq|=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}|1+\cos\theta|\cdot\sqrt{2}|\sin\theta|=\frac{3\sqrt{2}}{4}\sqrt{(1+\cos\theta)^2\sin^2\theta}$$
$$=\frac{3\sqrt{2}}{4}\sqrt{(1+\cos\theta)^2(1-\cos^2\theta)}=\frac{3\sqrt{2}}{4}\sqrt{(1+\cos\theta)^3(1-\cos\theta)}$$

そこで，$-1<t<1$ で，$f(t)=(1+t)^3(1-t)$ とおくと，$S=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\sqrt{f(t)}$

$$f'(t)=3(1+t)^2(1-t)-(1+t)^3$$
$$=-(1+t)^2(4t-2)$$

すると，$f(t)$ の増減は右表のようになり，S の最大値は，$\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\cdot\sqrt{\dfrac{27}{16}}=\dfrac{9}{16}\sqrt{6}$ である。

x	-1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$\frac{27}{16}$	↘	

［解 説］

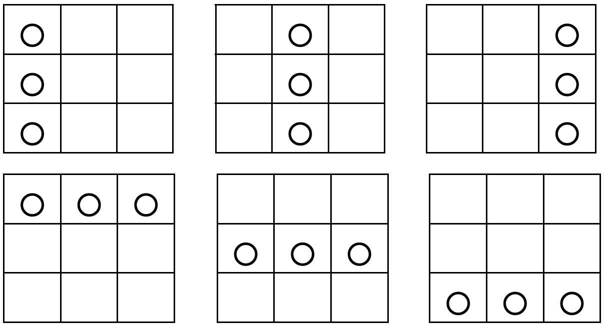
冒頭は 2 円の内接・外接を題材にした有名問題です。その後は，いろいろな解法が考えられます。なお，経済・後期で数Ⅲを選択予定であれば，$\mathrm{AP}+\mathrm{BP}=3$ から点 P の軌跡は楕円とわかり，(*)が式計算もほとんどなく導けます。

5

問題のページへ

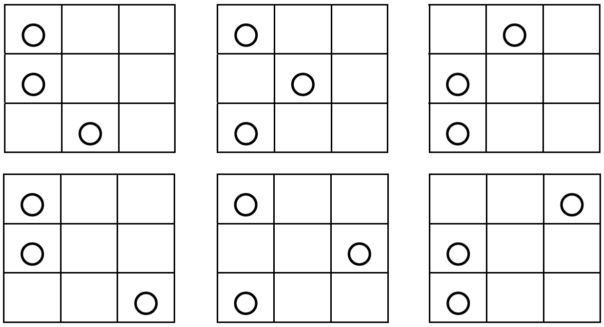
(1)　9 個のマスに 1 枚ずつ 3 枚のコインを置く ${}_9\mathrm{C}_3 = 84$ 通りが同様に確からしい。

ここで，$S=3$ であるのは，3 枚のコインが縦に 1 列または横に 1 列に置かれている場合で，右図の配置となる。



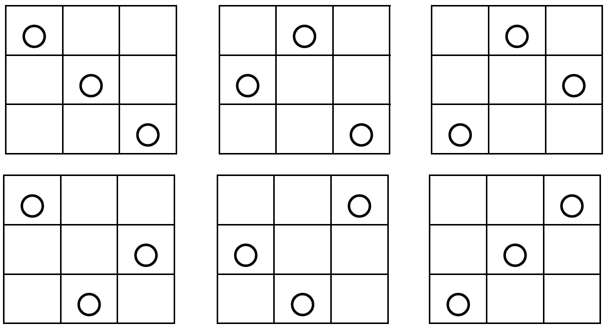
すると，全部で 6 通りの場合があるので，このときの確率は，$\dfrac{6}{84}=\dfrac{1}{14}$ である。

(2)　$S=1$ であるのは，2 枚のコインが縦に 1 列または横に 1 列に置かれ，その列以外はコインが 1 枚以下の場合で，たとえば，この 2 枚のコインが縦 1 列目のときは，右図の配置となる。



すると，2 枚のコインが，縦 2 列目，縦 3 列目，横 1 列目，横 2 列目，横 3 列目の場合も同様なので，全部で $6\times6=36$ 通りとなり，このときの確率は，$\dfrac{36}{84}=\dfrac{3}{7}$ である。

(3)　$S=0$ であるのは，どの列も置かれているコインが 1 枚の場合で，右図の配置となる。



すると，全部で 6 通りの場合があるので，このときの確率は，$\dfrac{6}{84}=\dfrac{1}{14}$ となる。

ここで，S の値は $0, 1, 2, 3$ のいずれかなので，$S=2$ となる確率は，$1-\left(\dfrac{1}{14}+\dfrac{3}{7}+\dfrac{1}{14}\right)=\dfrac{3}{7}$ である。

［解　説］

丁寧に数え上げるタイプの確率問題です。重複や数えもれに注意することがすべてです。