1

解答解説のページへ

n を 2 以上 20 以下の整数, k を 1 以上 $n-1$ 以下の整数とする。

$$ {}_{n+2}\mathrm{C}_{k+1} = 2({}_{n}\mathrm{C}_{k-1} + {}_{n}\mathrm{C}_{k+1}) $$

が成り立つような整数の組 $(n,\ k)$ を求めよ。

2

解答解説のページへ

a を正の実数とする。2 つの曲線 $C_1 : y = x^3 + 2ax^2$ および $C_2 : y = 3ax^2 - \dfrac{3}{a}$ の両方に接する直線が存在するような a の範囲を求めよ。

$\boxed{3}$

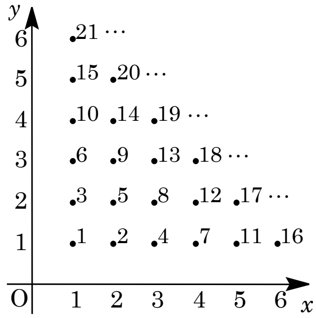
解答解説のページへ

原点を O とする座標空間内に 3 点 $A(-3,\ 2,\ 0)$，$B(1,\ 5,\ 0)$，$C(4,\ 5,\ 1)$ がある。P は $\left|\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}\right| \leqq 36$ を満たす点である。4 点 O, A, B, P が同一平面上にないとき，四面体 OABP の体積の最大値を求めよ。

4

解答解説のページへ

xy 平面上で，x 座標と y 座標がともに正の整数であるような各点に，右の図のような番号をつける。点 $(m,\ n)$ につけた番号を $f(m,\ n)$ とする。たとえば，$f(1,\ 1)=1$，$f(3,\ 4)=19$ である。



(1)　$f(m,\ n)+f(m+1,\ n+1)=2f(m,\ n+1)$ が成り立つことを示せ。

(2)　$f(m,\ n)+f(m+1,\ n)+f(m,\ n+1)+f(m+1,\ n+1)=2023$ となるような整数の組 $(m,\ n)$ を求めよ。

5

解答解説のページへ

A, B, C の 3 人が, A, B, C, A, B, C, A, …という順番にさいころを投げ, 最初に 1 を出した人を勝ちとする。だれかが 1 を出すか, 全員が n 回ずつ投げたら, ゲームを終了する。A, B, C が勝つ確率 P_{A}, P_{B}, P_{C} をそれぞれ求めよ。

1

問題のページへ

整数 $n\,(2\leqq n\leqq 20)$, $k\,(1\leqq k\leqq n-1)$ に対し，${}_{n+2}\mathrm{C}_{k+1}=2({}_{n}\mathrm{C}_{k-1}+{}_{n}\mathrm{C}_{k+1})$ のとき，

$$\frac{(n+2)!}{(k+1)!\,(n-k+1)!}=\frac{2n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!}+\frac{2n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}$$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{k(k+1)(n-k)(n-k+1)}=\frac{2}{(n-k)(n-k+1)}+\frac{2}{k(k+1)}$$

これより，$(n+1)(n+2)=2k(k+1)+2(n-k)(n-k+1)$ となり，

$$n^2+3n+2=2k(k+1)+2\{n^2-(2k-1)n+k(k-1)\}$$

$$n^2-(4k+1)n+(4k^2-2)=0$$

すると，$n^2-4kn+4k^2=n+2$ より，$(n-2k)^2=n+2$ ………(＊)

ここで，$4\leqq n+2\leqq 22$ より，(＊)を満たす n は，$n+2=4,\ 9,\ 16$ となる。

(i)　$n+2=4\ (n=2)$ のとき

(＊)から $(2-2k)^2=4$ となり，$2-2k=\pm2\ (1\leqq k\leqq 1)$ から不適である。

(ii)　$n+2=9\ (n=7)$ のとき

(＊)から $(7-2k)^2=9$ となり，$7-2k=\pm3\ (1\leqq k\leqq 6)$ から $k=2,\ 5$ である。

(iii)　$n+2=16\ (n=14)$ のとき

(＊)から $(14-2k)^2=16$ となり，$14-2k=\pm4\ (1\leqq k\leqq 13)$ から $k=5,\ 9$ である。

(i)～(iii)より，$(n,\ k)=(7,\ 2)$，$(7,\ 5)$，$(14,\ 5)$，$(14,\ 9)$ である。

［解　説］

二項係数が題材の整数問題ですが，解答例では，計算で押し通しました。平方数に着目した(＊)の式への変形がポイントです。

$\boxed{2}$

問題のページへ

$a>0$ のとき，曲線 $C_1: y=x^3+2ax^2 \cdots\cdots$①，$C_2: y=3ax^2-\dfrac{3}{a} \cdots\cdots$②に対して，

①より $y'=3x^2+4ax$ から，C_1 上の点 $(t,\ t^3+2at^2)$ における接線の方程式は，

$$y-(t^3+2at^2)=(3t^2+4at)(x-t),\ \ y=(3t^2+4at)x-2t^3-2at^2 \cdots\cdots\cdots③$$

ここで，②と③を連立すると，$3ax^2-\dfrac{3}{a}=(3t^2+4at)x-2t^3-2at^2$ となり，

$$3a^2x^2-a(3t^2+4at)x+2at^3+2a^2t^2-3=0 \cdots\cdots\cdots④$$

曲線 C_2 と接線③が接することより，④の判別式 D について，

$$D=a^2(3t^2+4at)^2-12a^2(2at^3+2a^2t^2-3)=0$$

$$9t^4+24at^3+16a^2t^2-24at^3-24a^2t^2+36=0$$

まとめると，$9t^4-8a^2t^2+36=0 \cdots\cdots\cdots$⑤

⑤において，$s=t^2$ とおき $9s^2-8a^2s+36=0 \cdots\cdots$⑥とすると，⑤が実数解 t をもつ条件は，⑥が $s\geqq 0$ の実数解をもつことに対応し，⑥の左辺 $f(s)$ は，

$$f(s)=9s^2-8a^2s+36=9\left(s-\frac{4a^2}{9}\right)^2-\frac{16a^4}{9}+36$$

すると，$\dfrac{4a^2}{9}>0$ で $f(0)=36>0$ なので，求める条件は $-\dfrac{16a^4}{9}+36\leqq 0$ となり，

$$4a^4-81\geqq 0,\ (2a^2+9)(\sqrt{2}a+3)(\sqrt{2}a-3)\geqq 0$$

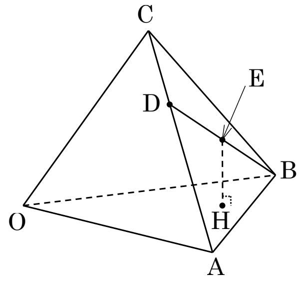
したがって，$a>0$ から，$a\geqq \dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$ である。

［解 説］

3 次曲線と放物線に共通接線が存在する条件を求めるという頻出の有名問題です。解答例では，接点は C_1 だけを設定しましたが，C_1 と C_2 の両方を設定して，2 つの接線が一致するという方法も考えられます。

3

問題のページへ



原点を O, xy 平面上の 2 点 $A(-3,\ 2,\ 0)$ と $B(1,\ 5,\ 0)$, および $C(4,\ 5,\ 1)$ に対し, 点 P が $\left|\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}\right|\leqq 36$ を満たすとき,

$$\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}-6\overrightarrow{OP}$$

すると, $\left|\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}-6\overrightarrow{OP}\right|\leqq 36$ となり,

$$\left|\overrightarrow{OP}-\frac{\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}}{6}\right|\leqq 6\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで, 辺 AC を $2:1$ に内分する点を D, 線分 BD の中点を E とおくと,

$$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}\right)=\frac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$$

$(*)$より, $\left|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OE}\right|\leqq 6$ となり, 点 P は点 E を中心とする半径 6 の球面または内部に存在する。そこで, この球面を S, また点 E から平面 OAB すなわち xy 平面に下ろした垂線と xy 平面の交点を H とおく。

すると, 四面体 OABP の体積の最大となるのは, 点 P が半直線 HE と球面 S との交点に位置するときである。

さて, 点 E の z 座標は$\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}$なので, $EH=\frac{1}{3}$である。また, $\triangle OAB$ の面積は $\frac{1}{2}\left|-3\cdot 5-2\cdot 1\right|=\frac{17}{2}$から, 四面体 OABP の体積の最大値は,

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{17}{2}\left(\frac{1}{3}+6\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{17}{2}\cdot\frac{19}{3}=\frac{323}{18}$$

［解 説］

空間ベクトルの応用問題で, 頻出のパターンです。与えられた条件式を$(*)$の形に変形すれば, 点 E の設定から結論まで一直線です。平面 OAB が xy 平面ですし……。

$\boxed{4}$　問題のページへ

(1)　点$(m,\ n)$の列について，$m+n$の値でグループ分けをし，

$$(1,\ 1)\ |\ (2,\ 1),\ (1,\ 2)\ |\ (3,\ 1),\ (2,\ 2),\ (1,\ 3)\ |\ (4,\ 1),\ \cdots$$

そして，左側から，第 1 群，第 2 群，第 3 群，第 4 群，…と呼ぶと，点$(m,\ n)$は，第$m+n-1$群のn番目となる。

さて，一般的に，kを自然数として，第k群の末項までの項数は，

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$$

これより，第k群のn番目までの項数は，$k\geqq 2$として$\frac{1}{2}(k-1)k+n$であるので，$m+n-1\geqq 2\ (m+n\geqq 3)$のとき，

$$f(m,\ n)=\frac{1}{2}(m+n-2)(m+n-1)+n\cdots\cdots\cdots①$$

なお，$m+n=2\ (m=n=1)$のときも，$f(1,\ 1)=1$から①は成り立っている。

①より，$f(m,\ n)=\frac{1}{2}(m+n)^2-\frac{3}{2}(m+n)+n+1$となり，

$$f(m+1,\ n+1)=\frac{1}{2}(m+n+2)^2-\frac{3}{2}(m+n+2)+n+2$$
$$=\frac{1}{2}(m+n)^2+\frac{1}{2}(m+n)+n+1$$
$$f(m,\ n+1)=\frac{1}{2}(m+n+1)^2-\frac{3}{2}(m+n+1)+n+2$$
$$=\frac{1}{2}(m+n)^2-\frac{1}{2}(m+n)+n+1$$

以上より，$f(m,\ n)+f(m+1,\ n+1)=2f(m,\ n+1)\cdots\cdots\cdots②$

(2)　$f(m,\ n)+f(m+1,\ n)+f(m,\ n+1)+f(m+1,\ n+1)=2023$に対し，②から，

$$f(m+1,\ n)+3f(m,\ n+1)=2023\cdots\cdots\cdots③$$

①より，$f(m+1,\ n)=\frac{1}{2}(m+n+1)^2-\frac{3}{2}(m+n+1)+n+1$となるので，

$$f(m+1,\ n)=f(m,\ n+1)-1\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$4f(m,\ n+1)-1=2023$となり，$f(m,\ n+1)=506\cdots\cdots\cdots⑤$

さて，506 が第k群にあるとすると，$\frac{1}{2}(k-1)k<506\leqq\frac{1}{2}k(k+1)$から，

$$(k-1)k<1012\leqq k(k+1)$$

すると，$31\cdot 32=992$，$32\cdot 33=1056$より$k=32$となり，また第 31 群末項までの項数が$\frac{1}{2}\cdot 31\cdot 32=496$なので，506 は第 32 群の$506-496=10$番目となる。

したがって，⑤から，点$(m,\ n+1)$は第 32 群の 10 番目に属し，

$$m+(n+1)-1=32,\ n+1=10$$

よって，求める$(m,\ n)$は，$(m,\ n)=(23,\ 9)$である。

［解 説］

群数列の標準的な問題です。なお，(2)では，③を m と n の方程式として表し，$m+n$ の値から絞り込む方法もあります。

5

問題のページへ

A, B, C, A, B, C, A, …という順番にさいころを投げ，最初に 1 を出した人を勝ちとする。だれかが 1 を出すか，全員が n 回ずつ投げたら，ゲームを終了する。

1 を出すのを○，1 以外を出すのを×で表すと，A が勝つのは，

○，×××○，××××××○，……

これより，A, B, C が勝つ確率をそれぞれ P_{A}　P_{B}，P_{C} とすると，

$$P_{\mathrm{A}}=\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^6\cdot\frac{1}{6}+\cdots+\left(\frac{5}{6}\right)^{3(n-1)}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{3n}}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^3}$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{216}{91}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{3n}\right\}=\frac{36}{91}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{3n}\right\}$$

また，B が勝つのは，×○，××××○，×××××××○，…より，

$$P_{\mathrm{B}}=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^4\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^7\cdot\frac{1}{6}+\cdots+\left(\frac{5}{6}\right)^{3n-2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{6}P_{\mathrm{A}}$$

$$=\frac{5}{6}\cdot\frac{36}{91}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{3n}\right\}=\frac{30}{91}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{3n}\right\}$$

さらに，C が勝つのは，××○，×××××○，××××××××○，…より，

$$P_{\mathrm{B}}=\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^5\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^8\cdot\frac{1}{6}+\cdots+\left(\frac{5}{6}\right)^{3n-1}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{6}P_{\mathrm{B}}$$

$$=\frac{5}{6}\cdot\frac{30}{91}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{3n}\right\}=\frac{25}{91}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{3n}\right\}$$

［解　説］

確率の基本問題です。具体的に考えれば，結論が導けます。